# ELEMENTI
DI
# GEOMETRIA PIANA
CON NOTE

DI


## A. M. LEGENDRE

MEMBRO DELL' ISTITUTO
E DELLA LEGIONE D' ONORE , DELLA SOCIETA' REALE
DI LONDRA ECC.


*VERSIONE DAL FRANCESE*

CORRETTA ED ACCRESCIUTA DI NOTE

PER

CAMILLO ZOCCHI








NAPOLI

TIPOGRAFIA SIMONIANA

1859.

## IL TRADUTTORE

*Non vi à chi ignori quanto sia difficile la composizione di elementi di scienze, giacchè questi debbono preparare l' animo di chi imprende a studiarle, in modo tale da farne percorrere liberamente l' intero campo dalle più semplici alle più intralciate dottrine, senza che urti a qualsiasi minimo passo; difficoltà che monta al massimo quando trattasi di scienza esatta. E relativamente ad elementi di geometria crediamo nessuno aver superato l' andamento di* Euclide, *poichè le sue verità sono disposte in modo che tutte con un progresso uniforme derivano l'una dall' altra, in guisa che più facilmente si apprendono, più fisse la mente le ritiene, e più presto vola a chiamarle in soccorso quante volte n' è d' uopo. Ma le sue lunghe dimostrazioni, e che molte volte defaticano la mente di chi studia, ed in modo speciale nella geometria solida, àn fatto sì, che altri siensi occupati a ridurle in una forma più concisa, e porle sotto un più ristretto punto di vista. Tra gli elementi di geometria che ànno più riscosso gli applausi dell' universale, primeggiano senza dubbio quelli di* A. M. Legendre, *la cui versione presentiamo al Pubblico.*

*Nella presente versione, per servire sempre più alla chiarezza, vi abbiamo apportata qualche innovazione. Avremmo voluto, è vero, sconvolgere alquanto l' ordine delle proposizioni per istabilirvi perfettamente l' andamento Euclideo, affinchè una proposizione di altre non abbisognasse per sembrar chiara agli studiosi se non che delle sole pre-*

*cedenti, senza far servire alla dimostrazione di alcuna verità la soluzione di qualche problema non ancora risoluto: lo che per altro non toglie rigore, poichè le costruzioni che entrano in un teorema non debbonsi eseguire effettivamente, ma solo immaginarle eseguite, e quindi basta il vederne la semplice possibilità: ma la difficoltà di simile operazione, obbietto serbato ai soli professori, e la idea di presentare una semplice versione con qualche piccola aggiunta, non ci ànno permesso tradire il nostro scopo principale.*

*Si è data opera adunque soltanto a modificare quelle che potevano con la giunta di qualche parola rendersi più semplici e chiare. Principalmente abbiamo creduto necessario togliere nei primi libri la maggior parte dei segni, poichè presentandosi questi per la prima volta allo studioso, spesso nel corso delle proposizioni il complesso di molti segni potevano, confondendolo, farlo deviare dal seguire il legame delle verità che si dimostravano: quindi ad ogni segno si è sostituita la sua pronunziazione; negli altri libri poi si sono reintegrati tali segni, giacchè trovandosi lo spirito più avvezzo alle speculazioni della scienza, non possono più formare positivo ostacolo.*

*Ogni proposizione si è distribuita nelle sue parti*; *cioè*, ipotesi, tesi, applicazione, costruzione, dimostrazione e conchiusione, *per mostrare il legame di queste parti fra loro e per maggior chiarezza.*

*In quelle proposizioni nelle quali si è potuto senza alterare il senso dell'Autore, si è fatto qualche picciolissimo cangiamento, come per esempio, si sono indicati dei passaggi che l'Autore sottintendeva e che possono essere utili, ed altro. In quelle proposi-*

*zioni poi in cui alla dimostrazione dell' Autore potea surrogarsi altra più semplice, per rendere più evidente qualche verità, per non cangiare il senso appunto dell' originale, e per non toccare minimamente quelle proposizioni che abbiamo riferite nel testo, si è quest' altra più semplice dimostrazione aggiunta in apposite note, nelle quali spesse fiate si è pure riportata qualche definizione od altro che mancava nell' originale.*

*Quantunque* Legendre *con la seconda nota mostri perchè siasi astenuto di ristabilire la teorica delle parallele sopra la stessa base di* Euclide; *pure noi riportando intieramente la sua, abbiamo stimato non irregolare asserire in una apposita nota la intiera teorica di* Euclide, *accomodata nel miglior modo possibile.*

*Con altra nota poi si è trattata più chiaramente la teorica delle intersezioni e contatti dei circoli.*

*Ciò posto, lo aver curato la traduzione di qualche espressione od altro dimostra questa versione non essere in vero rigorosamente letterale, ma un poco libera, senza per altro tradir mai l' originale, in maniera che, facendo astrazione da quelle poche note, il lettore lo rinverrà interamente.*

*Finalmente, se altro di buono non presenta questa versione, crediamo che l' esser priva, per quanto più è stato possibile, di quei tanti errori tipografici incorsi in altre, e che per queste specie di libri gittano in molta confusione colui che imprende a studiarli per la prima volta, voglia essere un titolo di raccomandazione a quei professori che di tale libro fanno uso.*

## AVVERTIMENTO

### PER LA XIII EDIZIONE FRANCESE

La dimostrazione della teorica delle parallele, tale quale presentata erasi nella terza edizione di questa opera e nelle successive edizioni inclusivamente la ottava, non essendo in salvo di qualche obbiezione, si era determinato nella nona edizione di ristabilire questa teorica presso a poco sopra la stessa base di *Euclide*. Ulteriori riflessioni fatte sopra lo stesso obbietto, delle quali se ne daranno gli sviluppi nella seconda nota, ànno fatto scoprire due nuove maniere di dimostrare il teorema sopra i tre angoli di un triangolo, senza il soccorso di alcun *postulato*. Si è inserita per conseguenza una di queste dimostrazioni nel testo di questa edizione scegliendo quella che meno si allontana dalle idee ordinarie, e che di altronde non sembra più difficile a comprendersi di quella che era stata data nelle edizioni precedenti dalla terza fino alla ottava.

Un secondo cangiamento che vedesi in questa edizione è relativo alla solidità della piramide triangolare. Si è ristabilita questa dimostrazione presso a poco come quella data nella prima edizione di questi elementi, ma profittando di una felice idea, dovuta al *Sig. Querret*, capo d' istituzione a Saint-Malo; essa consiste a rendere eguali le altezze dei prismi eccedenti e deficienti che si costruiscono nelle due piramidi paragonate. Con questo mezzo la dimostrazione della solidità della piramide sembra ridotta all' ultimo grado di semplicità cui era suscettiva.

In fine, siccome le tavole trigonometriche costrutte secondo la divisione decimale del quadrante, non sono così generalmente sparse, come quelle che si rapportano all' antica divisione della circonferenza, si è creduto perciò che non sarebbe inutile di aggiungere agli esempî di calcolo dati nella trigonometria i resultati che darebbe l' uso delle antiche tavole.

---

Il lettore che vorrà limitarsi, almeno in una prima lettura, ai semplici elementi, può passare senza inconveniente le note, le appendici, e generalmente ciò che è stampato in piccoli caratteri, come essendo meno utile, e chiedendo uno studio più approfondito. Egli ritornerà in seguito sopra questi obbietti, se lo crede a proposito, scegliendo quelli che gli converranno meglio, dopo l' avviso di un professore illuminato.

# ELEMENTI
DI
# GEOMETRIA PIANA

## LIBRO PRIMO



### PRINCIPJ

### DEFINIZIONI

I. La Geometria (*a*) è una scienza che à per obbietto la misura della estensione.

La estensione à tre dimensioni: lunghezza, larghezza ed altezza.

II. La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

Le estremità di una linea diconsi *punti*: il punto non à dunque estensione.

III. La *linea retta* è il più corto cammino da un punto ad un altro.

IV. Ogni linea che non è retta, nè composta di linee rette, è una *linea curva*.

Così, AB (*fig. 1*) è una linea retta, ACDB una linea *spezzata* o composta di linee rette, ed AEB è una linea curva. Fig. 1

V. *Superficie* è ciò che à lunghezza e larghezza, senza altezza o profondità.

VI. Il *piano* è una superficie nella quale prendendo due punti ad arbitrio ed unendo questi due punti, con una linea retta, questa linea sta tutta intera nella superficie (*b*).

(a) *Geometria, da* γέα *(gea) terra, e da* μέτρον *(metron) misura.*

(b) *Questa definizione è senza dubbio più distinta di* Legendre *Geom. Piana.*

VII. Ogni superficie che non è piana, nè composta di superficie piane è una *superficie curva*.

VIII. *Solido* o *corpo* è ciò che à lunghezza, larghezza ed altezza.

Fig. 2. IX. Allorchè (*fig. 2*) due linee rette AB, AC s'incontrano, la quantità più o meno grande per cui esse linee sono distanti l'una dall'altra, rispetto alla loro posizione, chiamasi *angolo*; il punto d'incontro o d'intersezione A dicesi il *vertice* dell'angolo; le linee AB, AC, chiamansi i *lati dell'angolo*.

L'angolo s'indica talora colla sola lettera del vertice A, talora con tre lettere BAC o CAB, avendo cura di mettere in mezzo la lettera del vertice.

Gli angoli sono, come tutte le quantità, suscettivi di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; così l'angolo DCE (*fig. 20*) è la somma dei due angoli DCB e BCE, l'angolo DCB è la differenza dei due angoli DCE e BCE.

Fig. 3. X. Quando la linea retta AB (*fig. 3*) incontra un'altra retta CD talmente che gli angoli adiacenti BAC e BAD sono eguali fra loro, ognuno di questi angoli si chiama *angolo retto*; e la linea AB dicesi essere *perpendicolare* a CD.

Fig. 4. XI. Ogni angolo BAC (*fig. 4*) minore di un angolo retto dicesi *angolo acuto*; ogni angolo DEF maggiore di un angolo retto dicesi *angolo ottuso*.

Fig. 5. XII. Due linee rette diconsi *parallele*, allorchè giacenti nel medesimo piano prolungate ambedue indefinitamente dall'una e l'altra parte non possono incontrarsi. Tali sono le rette AB, CD.

Fig. 6. XIII. *Figura piana* è un piano terminato per ogni parte da linee.

Se le linee sono rette, lo spazio che racchiudono si chiama *figura rettilinea* o *poligono*, e le linee stesse prese insieme formano il contorno o *perimetro* del poligono.

XIV. Il poligono di tre lati è il più semplice di tutti,

*quella che trovasi registrata nei codici greci, che contiene un'affezione della superficie piana la quale si suppone negli elementi; cioè di potersi congiungere due punti dati in una superficie piana con una linea retta, la quale sta tutta in detta superficie. Ma questa definizione del Simson non è che una piccola modificazione di quella che ne diede Erone Alessandrino:* la superficie piana è quella cui si può adattare ovunque la linea retta. (Il Trad.)

e si chiama *triangolo*; quello di quattro lati si chiama *quadrilatero*; quello di cinque lati *pentagono*; quello di sei *esagono*, etc.

XV. *Triangolo equilatero* si chiama quel triangolo che à tre lati eguali (*fig. 7*). Fig. 7.

*Triangolo isoscele* si chiama quel triangolo che à due lati eguali (*fig. 8*). Fig. 8.

*Triangolo scaleno* si chiama quel triangolo che à tutti e tre i lati diseguali (*fig. 9*). Fig. 9.

XVI. Il *triangolo rettangolo* è quello che à un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*; i lati poi dell'angolo retto chiamansi *cateti*. Così ABC (*fig. 10*) Fig. 10. è un triangolo rettangolo in A, il lato BC opposto all'angolo A è la ipotenusa, i lati BA, AC sono i cateti (*a*).

XVII. Il *quadrato* è un quadrilatero che à i suoi lati eguali e gli angoli retti (*fig. 11*). [ Ved. la proposizione XX, Libro 1.° ]. Fig. 11.

Il *rettangolo* è un quadrilatero che à gli angoli retti senza avere i lati eguali (*fig. 12*). (Ved. la med. prop. ). Fig. 12.

Il *parallelogrammo* o *romboide* è un quadrilatero che à i lati opposti paralleli (*fig. 13*). Fig. 13.

Il *rombo* è un quadrilatero che à i lati eguali senza che gli angoli sieno retti (*fig. 14*). Fig. 14.

Finalmente il trapezio è un quadrilatero che à due soli lati paralleli (*fig. 15*). Fig. 15.

XVIII. *Diagonale* di un poligono dicesi quella linea che unisce i vertici di due angoli non situati agli estremi di uno stesso lato; tale è AB (*fig. 42*). Fig. 42.

XIX. *Poligono equilatero* è quello che à tutti i lati eguali.

*Poligono equiangolo* è quello che à tutti gli angoli eguali.

XX. Due poligoni sono *equilateri tra loro* quando àn-

(a) *I triangoli rettilinei si distinguono in sei specie, tre rispetto ai lati, cioè* equilatero, isoscele *e* scaleno, *definiti sopra, e tre rispetto agli angoli, cioè il* rettangolo, *puranche definito dall'autore, e gli altri due qui sotto aggiunti, cioè*:

*Il* triangolo acutangolo *è quello che à i tre angoli acuti* (*fig. 7*). Fig. 7.

*Il* triangolo ottusangolo *è quello che à un angolo ottuso* (*fig. 9*). (Il Trad. ). Fig. 9.

no i lati respettivamente eguali e situati nel medesimo ordine, vale a dire, allorchè seguendo i loro contorni in un medesimo senso, il primo lato dell' uno è eguale al primo lato dell' altro, il secondo dell' uno è eguale al secondo dell' altro, il terzo al terzo, e così di seguito. Similmente concepiscesi ciò che significa due *poligoni equiangoli fra loro.*

In ambidue i casi i lati eguali o gli angoli eguali si chiamano lati od angoli *omologhi.*

N. B. *Le figure piane o tracciate sopra superficie piane saranno l' obbietto dei primi quattro libri* (*a*).

(a) *Affinchè vieppiù i principianti si avvezzassero a concepire in generale le cose, reputiamo utile far notare, dalle date definizioni derivar conseguentemente che :*

*Ogni quadrilatero è poligono, ma non ogni poligono è quadrilatero.*

*Ogni pentagono è poligono, ma non ogni poligono è pentagono . . . . etc.*

*Ogni triangolo equilatero è triangolo isoscele, ma non ogni triangolo isoscele è equilatero.*

*Ogni triangolo rettangolo è isoscele o scaleno, ma non ogni triangolo isoscele o scaleno è triangolo rettangolo.*

*Ogni triangolo equilatero è acutangolo, ma non ogni triangolo acutangolo è equilatero . . . . etc.*

*Ogni quadrato è rettangolo, ma non ogni rettangolo è quadrato.*

*Ogni quadrato è parallelogrammo o romboide, ma non ogni parallelogrammo o romboide è quadrato.*

*Ogni quadrato è rombo, ma non ogni rombo è quadrato.*

*Ogni quadrato è trapezio, ma non ogni trapezio è quadrato.*

*Ogni rettangolo è parallelogrammo o romboide, ma non ogni parallelogrammo o romboide è rettangolo.*

*Ogni rettangolo è trapezio, ma non ogni trapezio è rettangolo.*

*Ogni parallelogrammo o romboide è trapezio, ma non ogni trapezio è parallelogrammo o romboide etc.*

( Il Trad. )

*Assioma* è una proposizione evidente per sè stessa.

*Teorema* è una verità che diviene evidente per mezzo di un ragionamento chiamato *dimostrazione*.

*Problema* è una questione proposta che esige una *soluzione*.

*Lemma* è una verità impiegata sussidiariamente per la dimostrazione di un teorema o per la soluzione di un problema.

Il nome comune di *proposizione* si attribuisce indifferentemente ai teoremi, problemi e lemmi.

*Corollario* è la conseguenza che deriva da una o più proposizioni.

*Scolio* è una osservazione sopra una o più proposizioni precedenti, che tende a far vedere il legame, la utilità e l' applicazione loro.

*Ipotesi* è una supposizione fatta o nello enunciato di una proposizione o nel corso di una dimostrazione (*a*).

Il segno $=$ è il segno della eguaglianza; così la espressione $A = B$ significa A eguale a B.

Per esprimere che A è minore di B si scrive $A < B$.

Per esprimere che A è maggiore di B si scrive $A > B$.

Il segno $+$ si pronunzia *più*, ed indica l' addizione.

Il segno $-$ si pronunzia *meno*, e dinota la sottrazione: così $A + B$ rappresenta la somma delle quantità A e B; $A - B$ rappresenta la loro differenza o ciò che resta togliendo B da A; così $A - B + C$ o $A + C - B$ significa che A e C debbono essere aggiunte insieme, e che B deve esser tolta dalla loro somma.

Il segno $\times$ indica la moltiplicazione; così $A \times B$ rappresenta il prodotto di A moltiplicata per B. In vece del segno $\times$ si adopera talora un punto, così $A.B$ è lo stesso che $A \times B$. S' indica ancora il medesimo prodotto senza alcun segno intermedio da AB, ma non bisogna impiegare questa espressione se non che quando non devesi nello stesso tempo impiegare quella della linea AB, distanza dei punti A e B.

(*a*) *È da osservarsi che nello enunciato di ogni teorema si distinguono sempre due parti, la* ipotesi *e la* tesi; *la ipotesi è come ora abbiam definito, ciò che si suppone esser vero; la tesi* ciò che si vuol dimostrare (Il Trad.)

La espressione A $\times$ (B+C—D) o A (B+C—D) indica il prodotto di A per la quantità B+C—D. Se bisognasse moltiplicare A—B per A—B+C s' indicherebbe (A—B) $\times$ (A—B+C) ovvero (A—B) (A—B+C). Tutto ciò che rinchiudesi fra parentesi è considerato come una sola quantità.

Un numero posto innanzi ad una linea o ad una quantità serve di moltiplicare a questa linea o a questa quantità; così per esprimere che la linea AB è presa tre volte si scrive 3 AB; per indicare la metà dell' angolo A si scrive $\frac{1}{2}$ A.

Il quadrato della linea AB s' indica con $\overline{AB}^2$, il suo cubo con $\overline{AB}^3$. Spiegheremo a suo luogo ciò che significa precisamente il quadrato ed il cubo di una linea.

Il segno $\sqrt{}$ indica una radice da estrarsi; così $\sqrt{2}$ dinota la radice quadrata di 2; $\sqrt{A \times B}$ rappresenta la radice quadrata del prodotto A$\times$B o la media proporzionale fra A e B (*a*).

(a) *Notiamo la etimologia di alcuni vocaboli tecnici.*
Parallele, *da* παρὰ (*para*) presso, *e da* ἀλλήλων (*allélon*) degli uni e degli altri.
Poligono, *da* πολύς (*polys*) molto, *e da* γωνία (*gônia*) angolo.
Perimetro, *da* περί (*peri*) intorno, *e da* μέτρον (*metron*) misura.
Pentagono, *da* πέντε (*pente*) cinque, *e da* γωνία (*gônia*) angolo.
Esagono, *da* ἕξ (*hex*) sei, *e da* γωνία (*gônia*) angolo.
Isoscele, *da* ἴσος (*isos*) eguale, *e da* σκέλος (*scelos*) gamba.
Scaleno, *da* σκαλήνος (*scalénos*) ineguale.
Rettangolo, *da* ὀρθός (*orthos*) retto, *e da* γωνία (*gônia*) angolo.
Parallelogrammo, *da* παρὰ (*para*) presso, *e da* ἀλλήλων (*allélôn*) degli uni e degli altri, *e da* γραμμή (*grammé*) linea.
Romboide, *da* ῥόμβος (*rhombos*) rombo, *e da* εἶδος (*eidos*) forma.
Rombo, *da* ῥεμβω (*rhembô*) girar intorno.
Trapezio, *da* τράπεζα (*trapeza*).
Teorema, *da* θεωρέω (*theoreo*) esaminare.

*Assiomi.*

1.° Due quantità eguali ad una terza sono eguali fra loro.
2.° Il tutto è maggiore di una sua parte.
3.° Il tutto è eguale alla somma delle parti nelle quali è stato diviso.
4.° Da un punto ad un altro non si può condurre che una sola linea retta.
5.° Due grandezze, linee, superficie o solidi sono eguali, allorchè essendo situate l' una sull' altra coincidono in tutta la loro estensione (*a*).

## PROPOSIZIONE PRIMA.

### TEOREMA.

*Tutti gli angoli retti sono eguali fra loro.*

Sia la linea CD perpendicolare (*fig. 16*) ad AB, e GH ad EF; dico che gli angoli ACD, EGH sono eguali fra loro. Fig. 16

---

Diagonale, *da* διὰ (*dia*) per, *e da* γωνία (*gônia*) angolo.
Ipotenusa, da ὑπό (*hypo*) sotto, *e da* θείνω (*thenó*) spingere.
Cateto, *da* καθίημι (*cathiémi*) abbassare.
Problema, *da* πρὸ (*pro*) avanti, *e da* βάλλω (*balló*) gettare.
Lemma, *da* λήβω (*lebó*) *inusitato, per* λαμβάνω (*lambanó*) prendere.

(a) *Non reputiamo inutile aggiungere questi altri assiomi, giacchè nel corso di questi elementi il Sig. Legendre se ne serve.*

6.° *Se a grandezze eguali aggiungasi la stessa grandezza o grandezze eguali, quelle che resultano saranno eguali.*

7.° *Se da grandezze eguali tolgasi la stessa grandezza o grandezze eguali, le rimanenti saranno eguali.*

8.° *Se a grandezze diseguali aggiungasi la stessa grandezza o grandezze eguali, quelle che resultano saranno diseguali.*

9.° *Se da grandezze diseguali tolgasi la stessa grandezza o grandezze eguali, le rimanenti saranno diseguali.*

10.° *Le grandezze che sono doppie, triple, etc. di una medesima grandezza sono eguali fra loro.*

11.° *Le grandezze che sono la metà, la terza parte, etc. di una medesima grandezza, sono eguali fra loro.*

(Il Trad.)

Si prendano le quattro distanze eguali CA, CB, GE, GF, la distanza AB sarà eguale alla distanza EF, e si potrà situare la linea EF sopra AB in maniera che il punto E cada sopra il punto A, il punto F in B. Queste due linee così situate coincideranno intieramente l'una sopra l'altra, poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A in B, lo che è impossibile (*Ass. 4*); dunque il punto G medio di EF cadrà nel punto C medio di AB. Il lato GE essendo così applicato sopra CA, dovrà il lato GH cadere sopra DC; poichè se ciò si neghi, supponiamo, se è possibile che cada sopra una linea CK differente di CD; siccome per ipotesi (*Def. 10*) l'angolo EGH è eguale all' angolo HGF, dovrebbe essere l'angolo ACK eguale all' angolo KCB (*a*). Ma l'angolo ACK è maggiore di ACD, e l'angolo KCB è minore di BCD, d'altronde, per ipotesi, ACD è eguale a BCD; dunque ACK è maggiore di KCB; dunque la linea GH non può cadere sopra una linea CK differente da CD; dunque essa cade sopra CD, e l'angolo EGH sopra ACD; dunque *tutti gli angoli retti sono eguali fra loro*. Ciò bisognava dimostrare.

## PROPOSIZIONE II.

### TEOREMA.

*Ogni linea retta che incontra un' altra linea retta fa con questa due angoli adiacenti, la somma dei quali è eguale a due angoli retti.*

Fig. 17. La linea retta DC (*fig. 17*) che incontra la linea retta AB nel punto C, e fa con questa i due angoli adiacenti ACD e BCD; dico che la somma di questi due angoli è eguale a due angoli retti.

(a) *Ovvero più chiaramente. Ma l' angolo ACK è maggiore di ACD; dunque sarebbe l' angolo KCB maggiore di ACD, ed essendo ACD eguale a DCB, sarebbe l'angolo KCB maggiore dell' angolo DCB, cioè la parte maggiore del tutto, lo che è un assurdo* (Ass. 2) *nato dall' aver supposto che la GH non coincideva con la CD, dunque dovrà necessariamente cadere la GH sopra CD; e quindi gli angoli EGH ed ACD combaceranno e saranno* (Ass. 5) *per conseguenza eguali. Quindi* tutti gli angoli retti sono eguali fra loro. *Ciò bisognava dimostrare.* (Il Trad.)

Dal punto C s' intenda elevata sopra AB la perpendicolare CE. L'angolo ACD è eguale alla somma degli angoli ACE ed ECD (*Ass.3*), aggiuntosi di comune l'angolo DCB, sarà (*Ass.6*) la somma dei due ACD e DCB eguale alla somma dei tre ACE, ECD e DCB. Il primo di questi è retto, gli altri due fanno insieme l' angolo retto BCE. Dunque la somma dei due angoli ACD e DCB è eguale a due angoli r tti. Quindi *ogni linea retta che incontra* etc. C. B. D.

*Corollario I.°* Se uno degli angoli ACD , BCD è retto, l' altro lo sarà parimente.

*Corollario II.°* Se la linea DE è perpendicolare ad AB (*fig.18*) , reciprocamente AB sarà perpendicolare a DE. Fig. 18.

Poichè, essendo DE perpendicolare ad AB, ne segue che l'angolo ACD è eguale all'angolo DCB suo adiacente, e che dessi sono ambidue angoli retti. Ma dall' essere l' angolo ACD un angolo retto, ne segue che il suo adiacente ACE è pure un angolo retto; dunque l'angolo ACE è eguale all' angolo ACD ; e perciò AB è perpendicolare a DE.

*Corollario III.°* Tutti gli angoli consecutivi (*fig.34*) BAC, Fig. 34. CAD, DAE, EAF formati da una medesima parte della retta BF presi insieme equivalgono a due angoli retti; poichè la loro somma è eguale a quella dei due adiacenti angoli BAC, e CAF.

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

*Due linee rette che ànno due punti comuni coincidono l' una con l' altra in tutta la loro estensione , e non formano che una sola e medesima linea retta.*

Siano A e B ( *fig. 19* ) i due punti comuni alle due Fig. 19. rette ; dico che esse debbono coincidere l'una con l'altra e formare una sola linea retta.

Infatti nello intervallo AB le due rette debbono coincidere, poichè se ciò non fosse, allora vi sarebbero due linee rette da A in B, lo che è impossibile (*Ass.4*). Supponiamo se è possibile che queste linee essendo prolungate cominciano a separarsi al punto C, l' una prendendo la direzione CD e l'altra la direzione CE. Intendasi condotta al punto C la CF che faccia con CA l'angolo retto ACF. Poichè la linea ACD è retta, e per costruzione l'angolo FCA è un angolo retto, l'angolo FCD sarà anche retto (*Prop.2, Cor. 1*). Per la stessa ragione essendo la linea ACE retta, l'angolo FCE sarà un

angolo retto: ma gli angoli retti sono eguali fra loro; dunque dovrebbe essere l'angolo FCE eguale all'angolo FCD: ma la parte FCE non può essere eguale al tutto FCD; dunque le linee rette che ànno due punti comuni A e B non possono separarsi in verun punto del loro prolungamento, e non formano per conseguenza che una sola e medesima linea retta. Quindi *se due linee rette* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IV.

**TEOREMA.**

*Se due angoli adiacenti equivalgono a due angoli retti, i due lati esterni saranno in linea retta.*

Fig. 20. Siano i due angoli adiacenti (*fig. 20*) ACD e DCB che equivalgono a due angoli retti; dico che i due lati esterni AC, CB saranno in linea retta.

Poichè, se CB non è il prolungamento di AC, sia CE questo prolungamento; allora la linea ACE essendo retta, la somma degli angoli ACD, DCE sarà eguale a due retti (*Prop. 2*). Ma per ipotesi la somma degli angoli ACD, DCB è pure eguale a due retti; dunque la somma degli angoli ACD, DCE sarebbe eguale alla somma degli angoli ACD e DCB; togliendo da ambe le somme l'angolo comune ACD, resterebbe la parte DCB eguale al tutto DCE; lo che è un assurdo, nato dall'aver supposto essere CE il prolungamento di AC. Dunque CB è il prolungamento di AC. Quindi *se due angoli* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE V.

**TEOREMA.**

*Se due linee rette scambievolmente si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali fra loro.*

Fig. 21. Siano le due linee rette (*fig. 21*) AB e DE che si tagliano nel punto C; dico che gli angoli ACD ed ECB opposti al vertice sono eguali fra loro.

Imperciocchè, siccome la linea DE è retta, la somma degli angoli ACD, ACE è eguale a due retti; e siccome la linea AB è retta, la somma degli angoli ACE, BCE è pure eguale a due retti. Dunque la somma ACD più

ACE è eguale alla somma ACE più BCE. Togliendo l'angolo comune ACE da ambe le somme, resterà l'angolo ACD eguale al suo opposto BCE. Si dimostrerebbe similmente che l'angolo ACE è eguale al suo opposto BCD (*a*). Quindi *se due linee* etc. C. B. D.

*Scolio.* I quattro angoli formati intorno ad un punto da due rette che si tagliano, equivalgono insieme a quattro angoli retti; poichè gli angoli ACE, BCE presi insieme equivalgono a due angoli retti, e gli altri due ACD, BCD ànno lo stesso valore.

In generale, se quante rette si vogliano CA, CB etc. (*fig. 22*) s'incontrano in un punto C, la somma di tutti gli angoli consecutivi ACB, BCD, DCE, ECF, FCA sarà eguale a quattro angoli retti. Poichè se si formassero al punto C quattro angoli retti col mezzo di due linee perpendicolari tra loro, lo stesso spazio sarebbe occupato tanto dai quattro angoli retti, quanto dagli angoli successivi ACB, BCD, etc. Fig. 22.

## PROPOSIZIONE VI.

### TEOREMA.

*Se due triangoli ànno un angolo eguale, compreso fra due lati respettivamente eguali, questi triangoli saranno eguali.*

Sia l'angolo A (*fig. 23*) eguale all'angolo D, il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF; dico che i triangoli ABC, DEF saranno eguali. Fig. 23.

(a) *Ovvero con un linguaggio geometrico più chiaro, cioè: Infatti la linea retta AC* ( fig. 21 ) *insistendo sopra la retta DE fa gli angoli ACD ed ACE, saranno essi eguali a due angoli retti* ( Prop. 2 ). *Similmente insistendo la linea retta CE sopra la linea retta AB, fa gli angoli ECA ed ECB, e saranno essi eguali a due angoli retti: ma si sono mostrati eguali a due retti parimente gli angoli ACD ed ACE; adunque gli angoli ACD ed ACE sono eguali agli angoli ECA ed ECB, tolto il comune angolo ECA, sarà il rimanente ACD eguale al rimanente ECB; col medesimo ragionamento si dimostrerà l'angolo ACE essere eguale all'angolo DCB.* Fig. 21.
( Il Trad. ).

Infatti questi triangoli possono essere posti l'uno sopra l'altro in maniera che dessi coincidono perfettamente.

Ed in primo luogo, se si pone il lato DE sopra l'eguale AB, il punto D cadrà sopra A e il punto E in B: ma poichè l'angolo D è eguale all'angolo A, quando il lato DE sarà situato sopra AB, il lato DF prenderà la direzione AC. Dippiù DF è eguale ad AC, dunque il punto F cadrà in C; e cadendo il punto E in B ed il punto F in C, la linea EF terzo lato del triangolo DEF cadrà esattamente sopra la linea BC terzo lato del triangolo ABC. Dunque (*Ass. 5*) il triangolo DEF è eguale al triangolo ABC.

Quindi *se due triang.* etc. C. B. D.

*Corollario.* Dunque dall'essere eguali tre cose in due triangoli, cioè l'angolo A eguale all'angolo D, il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, si può conchiudere che le altre sono ancora eguali, cioè l'angolo B eguale all'angolo E, l'angolo C eguale all'angolo F, e il lato BC eguale al lato EF.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

***Se due triangoli ànno un lato eguale, adiacente a due angoli respettivamente eguali, sono eguali.***

Fig. 23. Sia il lato BC (*fig. 23*) eguale al lato EF, l'angolo B eguale all'angolo E, e l'angolo C eguale all'angolo F; dico che il triangolo DEF sarà eguale al triangolo ABC.

Poichè per eseguire la soprapposizione, sia situato EF sopra l'eguale BC; il punto E cadrà in B, ed il punto F in C. Poichè l'angolo E è eguale all'angolo B, il lato ED prenderà la direzione BA, onde il punto D si troverà sopra qualche punto della linea BA. Parimente, poichè l'angolo F è eguale all'angolo C, la linea FD prenderà la direzione CA, e il punto D si troverà sopra qualche punto del lato CA; dunque il punto che deve trovarsi ad un tempo stesso sopra le due linee BA, CA, cadrà sopra la loro unica intersezione A; dunque i due triangoli ABC, DEF coincidono l'uno con l'altro e sono perfettamente eguali.

Quindi *se due triang.* etc. C. B. D.

*Corollario.* Dunque dall'essere eguali tre cose in due triangoli, cioè BC eguale ad EF, l'angolo B eguale all'angolo E, l'angolo C eguale all'angolo F, si può conchiu-

dere che le altre tre sono pure eguali, cioè AB eguale a DE, AC eguale a DF, e l' angolo A eguale all' angolo D.

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA.

*In un triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*

Sia il triangolo ABC (*fig. 23*); dico che il lato BC è minore della somma dei lati AB, AC. Fig. 23.

Imperciocchè la linea retta BC è il più corto cammino da B in C (*Def. 3*); dunque BC è minore dei due AB, AC.

Quindi *in ogni triang.* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IX.

### TEOREMA.

*Se da un punto preso dentro di un triangolo si conducano alle estremità di un lato due linee rette, la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati del triangolo.*

Se dal punto O (*fig. 24*) preso dentro del triangolo ABC si conducano alle estremità del lato BC le linee rette OB, OC, la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati AB, AC del triangolo ABC. Fig. 24.

Si prolunghi BO fino allo incontro del lato AC in D; la linea retta OC è minore della somma di OD e DC (*Prop. 8*) aggiungendovi di comune BO, sarà (*Ass. 8*) BO più OC minore di BD più DC.

Si à parimente BD minore delle due BA più AD, aggiungendovi di comune DC, sarà (*Ass. 8*) BD più DC minore di BA più AC. Ma abbiamo dimostrato BO più OC minore di BD più DC; dunque con più ragione sarà BO più OC minore di BA più AC.

Quindi *se da un punto preso* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE X.

### TEOREMA.

*Se due triangoli abbiano due lati eguali a due lati respettivamente e l' angolo maggiore dell' angolo che è contenuto dai lati eguali, avranno ancora il terzo lato maggiore del terzo lato.*

Fig. 25. Siano i due triangoli ABC e DEF (*fig. 25*) che abbiano i due lati eguali respettivamente, cioè il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, ed abbiano l'angolo BAC maggiore dell'angolo EDF; dico che il terzo lato BC è maggiore del terzo lato EF.

Intendasi fatto l' angolo CAG eguale all' angolo in D, prendasi AG eguale a DE e tirisi CG, il triangolo GAC sarà eguale al triangolo DEF; giacchè questi triangoli ànno, per costruzione, un angolo eguale compreso tra lati eguali (*Prop. 6*); si avrà dunque CG eguale ad EF. Possono darsi tre casi secondochè il punto G cade fu ora del triangolo ABC o dentro, o sopra il lato BC.

*Primo caso.* La linea retta CG è minore di GI più IC (*Prop. 8*), la linea retta AB è minore di AI più IB; dunque GC più AB è minore di GI più AI più IC più IB, ovvero GC più AB minore di AG più BC. Togliendo da una parte AB e dall' altra la sua eguale AG, sarà (*Ass. 9*) GC minore di BC: ma GC è eguale ad EF; dunque si avrà EF minore di BC.

Fig. 26. *Secondo caso.* Se il punto G (*fig. 26*) cade sopra il lato BC, è chiaro che GC o la sua eguale EF sarà minore di BC.

Fig. 27. *Terzo caso.* Se il punto G (*fig. 27*) cade dentro il triangolo ABC, si avrà, seguendo il teorema precedente, AG più GC minore di AB più BC. Togliendo da una parte AG e dall' altra la sua eguale AB, resterà GC e la sua eguale EF minore di BC.

*Scolio.* Reciprocamente se i due lati AB, AC del triangolo ABC sono eguali ai due lati DE, DF del triangolo DEF, e se di più il terzo lato CB del primo triangolo è maggiore del terzo EF del secondo; dico che l'angolo BAC del primo triangolo sarà maggiore dell' angolo EDF del secondo.

Poichè, se ciò si neghi, bisognerà che l'angolo BAC sia eguale ad EDF o sia minore di EDF; nel primo caso il lato CB sarebbe eguale ad EF (*Prop. 6*), nel secondo caso CB sarebbe minore di EF: ora l'uno e l'altro sono contrari alla supposizione; dunque BAC è maggiore di EDF.

## PROPOSIZIONE XI.

### TEOREMA.

*Se due triangoli ànno i tre lati respettivamente eguali, saranno eguali.*

Siano i due triangoli (*fig. 23*) ABC e DEF che ànno i tre lati respettivamente eguali, cioè il lato AB eguale a DE, il lato AC eguale a DF, ed il lato BC eguale ad EF; dico che l'angolo A è eguale all'angolo D, l'angolo B eguale all'angolo E, e l'angolo C eguale all'angolo F; quindi tutto il triangolo ABC eguale a tutto il triangolo DEF. Fig. 23.

Poichè se l'angolo A fosse maggiore dell'angolo D, siccome i lati AB, AC sono respettivamente eguali ai lati DE, DF, ne seguirebbe pel teorema precedente che il lato BC sarebbe maggiore di EF: e se l'angolo A fosse minore di D, ne seguirebbe che il lato BC sarebbe minore di EF: ora BC è eguale ad EF; dunque l'angolo A non può essere nè maggiore nè minore dell'angolo D; dunque gli è eguale. Si dimostrerebbe nello stesso modo che l'angolo B è eguale all'angolo E, e l'angolo C all'angolo F.

Quindi *se due triangoli* etc. C. B. D.

*Scolio*. Si osserva che gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali: così gli angoli eguali A e D sono opposti ai lati eguali BC, EF.

## PROPOSIZIONE XII.

### TEOREMA.

*In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali.*

Sia nel triangolo isoscele ABC (*fig. 28*) il lato AB eguale al lato AC; dico che sarà l'angolo C eguale all'angolo B. Fig. 28

Dal vertice A tirisi al punto D medio della base AC

la linea AD, i due triangoli ABD, ADC avranno i loro tre lati respettivamente eguali, cioè AB eguale ad AC, per ipotesi, AD comune, BD eguale a DC, per costruzione; dunque sarà tutto il triangolo ABD eguale a tutto il triangolo ABC ( *Prop. prec.* ) e per conseguenza l'angolo B eguale all' angolo C.

Quindi *in un triangolo* etc. C. B. D.

*Corollario.* Un triangolo equilatero è nel medesimo tempo *equiangolo*, cioè à tutti i suoi angoli eguali.

*Scolio.* La eguaglianza dei triangoli ABD, ACD prova nello stesso tempo che l' angolo BAD è eguale all' angolo DAC, e che l'angolo BDA è eguale all'angolo ADC, e saranno retti ( *Def. 10*); dunque *la retta condotta dal vertice di un triangolo isoscele al punto medio della base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti eguali.*

In un triangolo non isoscele si prende indifferentemente per *base* un lato qualunque, ed allora il suo *vertice* è quello dell' angolo opposto. Nel triangolo isoscele si prende particolarmente per *base* il lato che non è eguale ad uno degli altri due.

## PROPOSIZIONE XIII.

### TEOREMA.

*Reciprocamente, se in un triangolo due angoli sono eguali, i lati opposti saranno eguali, ed il triangolo sarà isoscele.*

Fig. 19. Sia il triangolo ABC ( *fig. 29* ) che abbia l' angolo ABC eguale all' angolo ACB; dico che il lato AC sarà eguale al lato AB, ed il triangolo sarà isoscele.

Poichè se questi non sono eguali, sia AB il maggiore. Prendasi BD eguale ad AC e tirisi DC. L'angolo DBC è, per ipotesi, eguale all' angolo ACB: i due lati DB, BC sono eguali ai due AC, BC; dunque il triangolo ACB (*Prop. 6*) sarebbe eguale al triangolo DBC: ma la parte non può essere eguale al tutto; dunque i due lati dovranno essere eguali, e per conseguenza il triangolo ABC è isoscele.

Quindi *se in un triangolo* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

*In ogni triangolo al maggiore angolo è opposto il lato maggiore, e reciprocamente al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore.*

1.° Sia l'angolo C maggiore dell'angolo B (*fig. 30*); Fig.30. dico che il lato AB opposto all' angolo C è maggiore del lato AC opposto all' angolo B.

Intendasi fatto l' angolo BCD eguale all' angolo ABC; nel triangolo BDC si avrà (*Prop. 13*) BD eguale a DC. Ma la linea retta AC è più corta di AD più DC, ed AD più DC è eguale ad AD più BD, poichè si è dimostrato BD essere eguale a DC, ed AD più BD è il lato AB; dunque AB è maggiore di AC.

2.° Sia il lato AB maggiore di AC; dico che l' angolo C opposto al lato AB sarà maggiore dell' angolo B opposto al lato AC.

Poichè se si avesse C minore di B, ne seguirebbe da ciò che si è dimostrato AB minore di AC; lo che è contro la supposizione. Se poi fosse l' angolo C eguale all' angolo B, ne seguirebbe (*Prop. 13*) AB eguale ad AC; lo che pure è contro la supposizione. Dunque l'angolo C bisogna che sia maggiore dell' angolo B.

Quindi *in un triangolo* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

*Da un punto dato fuora di una retta indefinita non si può condurre che una sola perpendicolare a questa retta.*

Sia la linea retta DE (*fig. 31*) ed il punto fuora di Fig.31. essa A; dico che dal punto A una sola perpendicolare può condursi alla retta DE.

Suppongasi che se ne possano condurre due AB, AC; prolunghisi una di esse, e sia AB, e facciasi BF eguale ad AB, tirisi la CF.

Il triangolo CBF è eguale al triangolo ABC, poichè l' angolo CBF è retto al pari di CBA, il lato CB è comune, ed il lato BF eguale al lato BA.

Dunque questi triangoli essendo eguali ( *Prop. 6*) ne segue che l' angolo BCF è eguale all'angolo BCA. L'angolo BCA è retto per ipotesi ; dunque l' angolo BCF lo è pure. Ma se gli angoli adiacenti BCA , BCF equivalgono insieme a due angoli retti , bisogna che la linea ACF sia retta ( *Prop. 4* ) ; donde resulta che per i due medesimi punti A ed F si possono condurre due linee rette ABF , ACF , il che è impossibile ( *Ass. 4* ) ; dunque è parimente impossibile che da un medesimo punto siano condotte due perpendicolari sopra la medesima linea retta. Quindi *da un punto* etc. C. B. D.

Fig. 17. *Scolio.* Da un medesimo punto C ( *fig. 17* ) dato sopra la linea AB è similmente impossibile di condurre due perpendicolari a questa linea : perchè se potessero condursene due, e siano CD, CE queste due perpendicolari, l' angolo DCB sarebbe retto, come pure BCE ; ma questo è assurdo , poichè la parte sarebbe eguale al tutto.

## PROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

*Se da un punto situato fuora di una retta si conducano la perpendicolare e differenti oblique a differenti punti della stessa retta , la perpendicolare sarà la minore ; le due oblique condotte da una parte e dall'altra della perpendicolare a distanze eguali saranno eguali ; delle altre oblique poi, quella che si allontana di più dalla perpendicolare sarà la massima.*

Fig. 31. Sia il punto A ( *fig. 31* ) situato fuora della retta DE, e si tirino la perpendicolare AB e differenti oblique AE, AC, AD ; dico essere la perpendicolare AB minore di tutte le altre oblique ; le due oblique AC , AE , condotte da una parte e dall' altra della perpendicolare a distanze eguali BC, BE essere eguali ; e le altre oblique poi AC ed AD o AE ed AD condotte comunque , quella che si allontana di più sarà la massima , come AD.

Prolunghisi la perpendicolare AB di una lunghezza BF eguale ad AB , ed uniscansi le FC, FD.

1.° Il triangolo BCF è eguale al triangolo BCA , perchè l' angolo retto CBF è eguale all' angolo CBA, al lato CB è comune, ed il lato BF eguale al lato BA ; dunque (*Prop. 6*) il terzo lato CF è eguale al terzo lato CA. Ora

ABF linea retta è più corta di ACF linea spezzata; dunque AB metà di ABF è più corta di AC metà di ACF; dunque la perpendicolare è più corta di ogni obbliqua.

2.° Se si suppone BE eguale a BC, siccome si à inoltre AB di comune, l'angolo ABC eguale all'angolo ABE, ne segue che il triangolo ABC è eguale al triangolo ABE; dunque i due lati AE, AC sono eguali; dunque due obblique che si allontanano egualmente dalla perpendicolare sono eguali.

3.° Nel triangolo DFA isoscele la somma delle linee AC, CF ( *Prop. 9* ) è minore della somma di AD e DF; dunque AC metà di ACF è minore di AD metà di ADF; dunque le obblique che si allontanano di più dalla perpendicolare sono le maggiori.

Quindi *se da un punto* etc. C. B. D.

1.° *Corollario*. La perpendicolare misura la vera distanza da un punto ad una retta, poichè dessa è più corta di ogni obbliqua.

2.° Da un medesimo punto non si possono condurre ad una medesima retta tre linee rette eguali; poichè, se ciò fosse, vi sarebbero da una medesima parte della perpendicolare due obblique eguali, lo che è impossibile.

## PROPOSIZIONE XVII.

### TEOREMA.

*Se dal punto medio di una retta si alzi una perpendicolare sopra questa retta, ogni punto della perpendicolare sarà egualmente distante dalle due estremità della linea, ed ogni punto situato fuora della perpendicolare sarà disegualmente distante dalle medesime estremità.*

Se dal punto C ( *fig. 32* ) medio della retta AB si alzi la perpendicolare EF; dico che ogni punto di questa perpendicolare sarà egualmente distante dalle due estremità della linea AB; ed ogni punto situato fuora della perpendicolare sarà disegualmente distante dalle medesime estremità A e B.

Fig. 32.

Imperciocchè siccome si suppone AC eguale a CB, le due obblique AD, BD si allontanano egualmente dalla perpendicolare; esse dunque sono eguali; lo stesso accade per le due obblique AE, EB, per le due AF, FB etc. quindi ogni punto della perpendicolare è egualmente distante dalle estremità A e B.

Sia I un punto fuori della perpendicolare; se si tirino IA, IB, una di queste linee taglierà la perpendicolare in D; e tirando DB si avrà DB eguale a DA. Ma la linea retta IB è più corta che la linea spezzata ID più DB, ed ID più DB è eguale ad ID più DA ovvero ad IA; dunque IB è minore di IA; dunque ogni punto fuora della perpendicolare è disegualmente distante dalle estremità A,B.

Quindi *se dal punto medio* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XVIII.

### TEOREMA.

*Due triangoli rettangoli sono eguali quando ànno la ipotenusa eguale ed un lato eguale.*

Fig. 33. Sia la ipotenusa AC ( *fig. 33* ) eguale alla ipotenusa DF, ed il lato AB eguale a DE; dico che il triangolo rettangolo ABC sarà eguale al triangolo rettangolo DEF.

La eguaglianza sarebbe manifesta se il terzo lato BC fosse eguale al terzo EF. Suppongasi, se è possibile, che questi lati non siano eguali, e che BC sia il maggiore. Prendasi BG eguale ad EF, e tirisi AG. Il triangolo ABG è eguale al triangolo DEF, perchè l' angolo retto B è eguale all' angolo retto E, il lato AB eguale a DE, ed il lato BG è eguale ad EF; dunque questi due triangoli sono eguali ( *Prop. 6* ), e si à per conseguenza AG eguale a DF; ma, per ipotesi, DF è eguale ad AC; dunque AG è eguale ad AC. Oltracciò la obbliqua AC non può essere eguale ad AG ( *Prop. 16* ) giacchè più lontana dalla perpendicolare AB; dunque è impossibile che BC differisca da EF; dunque il triangolo ABC è eguale al triangolo DEF.

Quindi *due triangoli* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XIX.

### TEOREMA.

*In ogni triangolo la somma dei suoi tre angoli è eguale a due angoli retti.*

Fig. 35. Sia ABC il triangolo ( *fig. 35* ); dico che la somma dei tre angoli ACB, CBA, BAC è eguale a due angoli retti.

Nel triangolo proposto ABC supporremo (*a*) che BA sia il lato maggiore e BC il minore, e che per conseguenza ACB sia l' angolo maggiore e BAC il minore, ( *Prop. 14* ). Pel punto A e pel punto I medio del lato opposto BC tirisi la retta AI che prolunghisi in C', fino a che sia AC' eguale ad AB. Prolunghisi similmente AB in B', fino a che sia AB' doppia di AI.

Se si denotino con A, B, C i tre angoli del triangolo ABC, e similmente con A', B', C' i tre angoli del triangolo AB'C', dico che si avrà l' angolo C' eguale all' angolo B più l' angolo C, e l' angolo A eguale ad A' più B', dal che resulta A più B più C eguale ad A' più B' più C'; cioè a dire che la somma dei tre angoli è la stessa nei due triangoli.

Facciasi AK eguale ad AI e congiungasi C'K, si avrà il triangolo C'AK eguale al triangolo BAI, poichè in questi due triangoli l' angolo comune A è compreso tra lati rispettivamente eguali, cioè AC' eguale ad AB ed AK eguale ad AI. Dunque il terzo lato C'K è eguale al terzo lato BI, e quindi anche l' angolo AC'K è eguale ad ABC, e l' angolo AKC' eguale ad AIB.

Dico ora che il triangolo B'C'K è eguale al triangolo ACI; perchè la somma dei due angoli adiacenti AKC' più C'KB' è eguale a due angoli retti ( *Prop. 2* ) al pari della somma dei due angoli AIC, AIB, sottraendo da una parte e dall' altra gli angoli eguali AKC', AIB, resterà l'angolo C'KB' eguale ad AIC. Questi angoli eguali nei due triangoli sono compresi tra lati respettivamente eguali, cioè C'K eguale ad IB eguale ad IC, e KB' eguale ad AK eguale ad AI, giacchè per costruzione AB' è eguale a 2AI eguale a 2AK. Dunque i due triangoli B'KC', CAI sono eguali ( *Prop. 6* ), e perciò il lato C'B' eguale ad AC; l'angolo B'C'K eguale ad ACB e l' angolo KB'C' eguale a CAI.

Segue da ciò: 1.° che l' angolo AC'B' disegnato con C', è composto da due angoli eguali agli angoli B e C del triangolo ABC, e che perciò si à C' eguale a B più C; 2.° che l'angolo A del triangolo BAC è composto dall' angolo A', ossia C'AB' che appartiene al triangolo AB'C', e dall'angolo CAI eguale all'angolo B' dello stesso triangolo, ciò che dà A eguale ad A' più B'; dunque sarà A più B

(a) *Questa supposizione non esclude il caso in cui il lato medio AC fosse eguale ad uno degli estremi AB o BC.*

più C eguale ad $A'$ più $B'$ più $C'$. D'altronde perchè si à per ipotesi AC minore di AB, per conseguenza $C'B'$ minore di $AC'$, si vede che nel triangolo $AC'B'$ l'angolo A, disegnato da $A'$ è minore di $B'$, e siccome la somma di questi due angoli è eguale all'angolo A del triangolo proposto, così ne segue che si à l'angolo $A'$ minore della metà dell'angolo A.

Se si applichi la stessa costruzione al triangolo $AB'C'$, per formare un terzo triangolo $AC''$, $B''$, del quale gli angoli sono disegnati con $A''$, $B''$, $C''$, si avranno similmente le due eguaglianze, cioè l'angolo $C''$ eguale a $C'$ più $B'$, $A'$ eguale ad $A''$ più $B''$, dal che resulta $A'$ più $B'$ più $C'$ eguale ad $A''$ più $B''$ più $C''$. Quindi la somma dei tre angoli è la stessa in questi triangoli. Si avrà ancora l'angolo $A''$ minore della metà dell'angolo $A'$ e per conseguenza $A''$ è minore della quarta parte dell'angolo A.

Continuando indefinitivamente la serie dei triangoli $AC'B'$, $AC''B''$ etc. si arriverà ad un triangolo *abc* nel quale la somma dei tre angoli sarà sempre la stessa che nel triangolo proposto ABC, e che avrà l'angolo *a* più piccolo di qualunque termine della progressione decrescente

$$\frac{1}{2}\text{ A}, \frac{1}{4}\text{ A}, \frac{1}{8}\text{ A etc.}$$

Si può dunque supporre questa serie di triangoli prolungata fino a che l'angolo *a* sia minore di qualunque angolo dato. E se per mezzo del triangolo *abc* si costruisca il triangolo seguente $a'b'c'$, la somma degli angoli $a'$ più $b'$ di questo triangolo sarà eguale all'angolo *a*, e sarà per conseguenza minore di qualunque angolo dato; dal che si vede che la somma dei triangoli del triangolo $a'b'c'$ si riduce quasi al solo angolo $c'$.

Per avere la misura precisa di questa somma, prolunghiamo $a'c'$ verso $d'$, e chiamiamo $x'$ l'angolo esterno $b'c'd'$, questo angolo $x'$ unito all'angolo $c'$ del triangolo $a'b'c'$, fa una somma eguale a due angoli retti ( *Prop. 2* ); e perciò disegnando l'angolo retto con D, si avrà $c' = 2D - x'$; dunque la somma degli angoli del triangolo $a'b'c'$ sarà

$$2D + a' + b' - x'.$$

Ma si può concepire che il triangolo $a'c'b'$ varia nei suoi angoli e nei suoi lati in modo da rappresentare i suc-

cessivi triangoli che nascono ulteriormente colla stessa costruzione, e che si approssimano di più in più al limite in cui gli angoli $a'$ e $b'$ sarebbero nulli.

In questo limite la retta $a'c'd'$ confondendosi con $a'b'$, i tre punti $a'c'b'$, finiscono con essere esattamente in linea retta: allora gli angoli $b'$ ed $x'$ divengono nulli nello stesso tempo che l' angolo $a$, e la quantità $2D+a'+b'-x'$, che misura la somma dei tre angoli del triangolo $a'c'b'$ si riduce a 2D; dunque *in ogni triangolo la somma dei suoi tre angoli è eguale a due angoli retti.* C. B. D.

*Corollario I.* Due angoli di un triangolo essendo dati, o solamente la loro somma, si conoscerà il terzo sottraendo la somma di questi angoli da due angoli retti.

*II.* Se due angoli di un triangolo sono respettivamente eguali a due angoli di un altro triangolo, sarà il terzo dell'uno eguale al terzo dell' altro, ed i due triangoli saranno equiangoli tra di loro.

*III.* In un triangolo non vi può essere che un solo angolo retto, poichè se ve ne fossero due, il terzo dovrebb' essere nullo; e con più ragione un triangolo non può avere che un angolo ottuso.

*IV.* In ogni triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è eguale ad un angolo retto (*a*).

*V.* In ogni triangolo equilatero ogni angolo è il terzo di due angoli retti o due terzi di un retto. Dunque se l'angolo retto è rappresentato da 1, l' angolo del triangolo equilatero lo sarà da $\frac{2}{3}$.

*VI.* In ogni triangolo se si prolunga il lato AB verso D, l' angolo esterno CBD sarà eguale alla somma dei due interni opposti A, C, poichè aggiungendo di comune ABC, le due somme sono eguali a due angoli retti.

(a) *E se il triangolo rettangolo è isoscele, allora ciascun o dei due angoli acuti è eguale alla metà di un retto.*
(Il Trad.)

## PROPOSIZIONE XX.

**TEOREMA.**

*La somma di tutti gli angoli interni di un poligono è eguale a tante volte due angoli retti, quante unità vi sono nel numero dei suoi lati meno due.*

Fig 42. Sia ABCDEFG (*fig. 42*) il poligono proposto; dico che la somma di tutti gli angoli interni ABC, BCD ... etc. è eguale a tante volte due angoli retti, quante unità vi sono nel numero dei suoi due lati meno due. Se dal vertice dell' angolo A si conducano a tutti i vertici degli angoli opposti le diagonali AC, AD...etc. è facile il vedere che il poligono resta diviso in tanti triangoli, quanto è il numero dei suoi lati meno due; perchè questi triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto A e per basi i differenti lati del poligono, eccettuati solo i due AB ed AC che formano l'angolo BAC. Si vede nel medesimo tempo che la somma degli angoli di tutti questi triangoli non differisce punto dalla somma degli angoli del poligono. Dunque questa ultima somma è eguale a tante volte due angoli retti, quanti sono i triangoli, e vale a dire quante unità sono nel numero dei lati del poligono meno due.

*Corollario I.°* La somma degli angoli di un quadrilatero è eguale a due angoli retti moltiplicati per $4-2$; ciò che fa quattro angoli retti; dunque se tutti gli angoli di un quadrilatero sono eguali, ciascuno di loro sarà un angolo retto; lo che giustifica la definizione XVII ove si è presupposto che i quattro angoli di un quadrilatero sono retti nel caso sì del rettangolo, che del quadrato.

*Corollario II.°* La somma degli angoli di un pentagono è eguale a due angoli retti moltiplicati per $5-2$; lo che fa 6 angoli retti; dunque allorchè un pentagono sia *equiangolo*, ciascun angolo è eguale al quinto di sei angoli retti ovvero ai $\frac{6}{5}$ di un angolo retto.

*Corollario III.°* La somma degli angoli di un esagono è di $2 \times (6-2)$ ovvero di 8 angoli retti; dunque nello esagono equiangolo ciascun angolo è il sesto di 8 angoli retti o sivvero i $\frac{4}{3}$ di un angolo retto.

*Scolio*. Se si volesse ( *fig. 43* ) applicare questa proposizione ai poligoni che ànno uno o più angoli *rientranti*, bisognerebbe considerare ciascun angolo *rientrante* come essendo maggiore di due angoli retti. Ma per amor di semplicità non considereremo qui ed in seguito se non che poligoni ed angoli *salienti*, che si posson chiamare ancora *poligoni convessi*. Ogni poligono convesso è tale che una linea retta condotta come si vorrà non può incontrare il contorno di questo poligono se non che in due punti (*a*). Fig. 43.

## PROPOSIZIONE XXI.

### TEOREMA.

*Se due linee rette sono perpendicolari ad una terza retta, queste due linee saranno parallele, vale a dire che non si potranno incontrare a qualunque distanza si prolunghino.*

Siano le due linee rette ( *fig. 36* ) AB, CD perpendicolari alla terza FG ; dico che le due linee AB, CD saranno parallele , cioè che non si potranno incontrare a qualunque distanza si prolunghino ( *Def. 12* ). Fig. 36.

Poichè , se ciò non è , allora prolungate dovrebbero incontrarsi in un punto O , ed esisterebbero perciò due perpendicolari OF , OG , abbassate dal medesimo punto O sopra la stessa linea retta FG ; ciò è impossibile ( *Prop. 15* ). Quindi *se due linee rette* etc. C. B. D.

(a) *È utile fare notare che tutti gli angoli esterni di un poligono sono eguali a quattro retti.*

*Generalmente parlando se prolunghinsi tutti i lati di un poligono, ogni angolo interno con lo adiacente esterno è eguale a due retti; dunque gli angoli interni insieme agli esterni di un poligono sono eguali a tante volte due retti , quanti sono i lati del poligono ; ma per lo dimostrato teorema gli angoli interni solamente sono eguali a tante volte due retti , quanti sono i lati meno due , ovvero meno 4 retti ; quindi questa costante differenza fra gli angoli interni ed esterni e gl' interni soli, è il valore degli angoli esterni di qualunque poligono.*
( Il Trad. ).

## PROPOSIZIONE XXII.

**TEOREMA.**

*Se due linee rette fanno con una terza due angoli interni, la cui somma sia eguale a due angoli retti, le due rette saranno parallele.*

Fig. 36. Siano le due linee rette ( *fig. 36* ) AB, CD, che facciano con la terza linea EF i due angoli interni, e dalla medesima parte BEF, DFE eguali insieme a due angoli retti; dico le linee AB, CD essere parallele.

Se gli angoli BEF, DFE fossero èguali, sarebbero l'uno e l'altro retto; quindi ciascuna delle due linee AB, CD sarebbe perpendicolare alla terza EF, e perciò parallela ( *Prop. prec.* ). Suppongasi dunque che essi siano diseguali; dal punto F, vertice del maggiore angolo intendasi abbassata la FG perpendicolare ad AB. Nel triangolo FGE rettangolo in G la somma dei due angoli acuti FEG più EFG è eguale ad un retto ( *Prop. 19, Cor. 4* ); questa somma essendo tolta dalla somma BEF più EFD, eguale per ipotesi a due angoli retti, resterà l' angolo DFG eguale ad un angolo retto. Dunque le due AB, CD essendo perpendicolari alla stessa linea FG, saranno parallele ( *Prop. 21* ).

Quindi *se due linee* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XXIII.

**TEOREMA.**

*Se due linee rette fanno con una terza retta due angoli interni dalla medesima parte, la cui somma sia minore o maggiore di due angoli retti, le due linee rette prolungate sufficientemente dovranno incontrarsi.*

Fig. 37. Siano le due linee rette ( *fig. 37* ) AB, CD, che facciano con la terza retta EF i due angoli interni dalla medesima parte BEF, DFE, la cui somma è minore di due angoli retti; dico le rette AB, CD prolungate dovranno incontrarsi; similmente dico s' incontreranno se formano gli angoli AEF, CFE dalla stessa parte, la cui somma è maggiore di due angoli retti.

1.° Sia la somma BEF più EFD minore di due angoli

retti; intendasi tirata FG in maniera che l' angolo EFG sia eguale ad AEF, si avrà la somma BEF più EFG eguale alla somma BEF più AEF, e per conseguenza eguali a due angoli retti; e poichè BEF più EFD è minore di due angoli retti, così la retta DF sarà compresa nell' angolo EFG.

Per il punto F tirisi una obbliqua FM che incontri AB in M, l'angolo AMF sarà eguale a GFM, poichè aggiungendo di comune la stessa quantità EFM più FEM, le due somme sono eguali, ciascuna a due angoli retti. Prendasi in seguito MN eguale ad FM e congiungasi FN; l'angolo AMF esterno al triangolo FMN, è eguale alla somma dei due interni opposti MFN, FNM ( *Prop. 19*, *Cor. 6* ): ma questi sono eguali fra loro, come opposti ai lati eguali MN, FM; dunque l' angolo AMF o il suo eguale MFG è doppio di MFN; quindi la retta FN divide in due parti eguali l'angolo GFM ed incontra la linea AB al punto N posto alla distanza MN eguale ad FM.

Ne segue dalla medesima dimostrazione, che se si prenda NP eguale ad FN, si determinerà sulla linea AB il punto P, ove termina la retta FP che fa l' angolo GFP eguale alla metà dell' angolo GFN o al quarto dell' angolo GFM.

Si possono dunque prendere successivamente la metà, il quarto, la ottava parte etc. dell'angolo GFM, e le linee che operano questa divisione incontrano la linea AB in punti di più in più distanti, ma facili a determinare; poichè MN eguale a FM, NP eguale a FN, PQ eguale a PF etc. Si può anche osservare che ogni distanza di uno di questi punti d'intersezione dal punto fisso F, non è affatto doppia della distanza del punto d' intersezione precedente; poichè FN, per esempio, è minore di FM più MN, ovvero di 2FM; similmente FP è minore di 2FN, FQ è minore di 2FP etc.

Ma continuando a suddividere l' angolo GFM in ragione doppia, si arriverà ben tosto ad un angolo GFZ minore dell' angolo dato GFD, e sarà ancor vero che FZ prolungata incontra AB in un punto determinato; dunque con più ragione la retta FD, compresa nell' angolo EFZ, incontrerà AB.

2.° Sia la somma dei due angoli AEF più CFE maggiore di due angoli retti; prolunghisi AE verso B e CF verso D, la somma dei quattro angoli AEF, BEF, CFE, EFD sarà eguale a quattro angoli retti; dunque se da questa somma si tolga AEF più CFE maggiore di due retti, resterà la somma BEF più EFD minore di due angoli ret-

ti. Dunque secondo il primo caso le linee EB , FD prolungate sufficientemente debbono incontrarsi. Quindi *se due linee* etc. C. B. D.

*Corollario.* Per un punto dato non si può tirare che una sola parallela ad una linea data AB, poichè avendo tirato FE ad arbitrio , non vi è che una linea FG che faccia la somma dei due angoli BEF più EFG eguale a due angoli retti ; ogni altra linea FD farebbe la somma dei due angoli BEF, EFD maggiore o minore di due angoli retti, ed incontrerebbe per conseguenza la linea AB.

## PROPOSIZIONE XXIV.

### TEOREMA.

***Se due linee parallele sono intersecate da una terza linea , la somma degli angoli interni dalla stessa parte sarà eguale a due angoli retti.***

Fig. 38. Siano le due linee parallele (*fig. 38*) AB , CD intersecate dalla terza EF; dico la somma degli angoli interni AGO , GOC sarà eguale a due angoli retti.

Poichè, se ciò non fosse, allora tale somma dovrebbe essere o maggiore o minore di due angoli retti , e le linee AB, CD s' incontrerebbero da una parte o dall' altra ( *Prop. 23* ) e non sarebbero parallele. Quindi *se due linee* etc. C. B. D.

*Corollario I.°* Se l' angolo GOC è retto, l' angolo AGO dev' esserlo pure; dunque ogni linea retta perpendicolare ad una delle parallele è perpendicolare ancora all'altra.

*Corollario II.°* Poichè la somma AGO più GOC è eguale a due angoli retti, e che la somma GOD più GOC è pure eguale a due angoli retti, se si tolga da una parte e dall' altra il comune angolo GOC, resterà l'angolo AGO eguale all' angolo GOD. D'altronde AGO è eguale a BGE e GOD è eguale a COF ( *Prop. 5* ) ; dunque i quattro angoli acuti AGO , BGE , GOD, COF sono eguali fra loro; accade lo stesso dei quattro angoli ottusi AGE, BGO, GOC, DOF. Si può osservare di più che sommando uno dei quattro angoli acuti con uno dei quattro angoli ottusi , la somma sarà sempre eguale a due angoli retti.

*Scolio.* Gli angoli, dei quali abbiamo parlato, paragonati due a due prendono differenti nomi. Abbiamo già chiamati gli angoli AGO, GOC *interni da una medesima parte;* gli angoli BGO e GOD ànno il medesimo nome ; gli angoli AGO, GOD si chiamano *alterni-interni* o semplice-

mente *alterni*, e così pure gli angoli BGO, GOC. Finalmente si chiamano *interni-esterni* gli angoli EGB, GOD, oppure EGA, GOC; ed *alterni-esterni* gli angoli EGB, COF, oppure AGE, DOF. Ciò posto, si possono riguardare le seguenti proposizioni come già dimostrate.

1.° Gli angoli interni da una medesima parte presi insieme sono eguali a due angoli retti.

2.° Gli angoli alterni-interni sono eguali, come pure gli angoli interni-esterni e gli angoli alterni-esterni.

Reciprocamente se in questo secondo caso due angoli del medesimo nome sono eguali, si può conchiudere che le linee alle quali si rappresentano sono parallele. Sia, per esempio, l'angolo AGO eguale a GOD, perchè GOC più GOD è eguale a due retti, si avrà pure AGO più GOC eguale a due angoli retti; dunque (*Prop. 22*) le linee AG, CO sono parallele.

## PROPOSIZIONE XXV.

### TEOREMA.

*Se due linee rette sono parallele ad una terza, sono parallele fra loro.*

Siano le due linee rette (*fig. 39*) AB, CD parallele alla terza EF; dico che le due linee sono parallele fra loro. Fig. 39

Tirisi la secante RQP perpendicolare ad EF. Poichè AB è parallela ad EF, la secante PR sarà perpendicolare ad AB (*Prop. 24, Cor. 1*); parimente, poichè CD è parallela ad EF, la secante PR sarà perpendicolare a CD; dunque AB e CD sono perpendicolari alla medesima linea retta PQ; dunque esse sono parallele (*Prop. 21*). Quindi *se due linee* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XXVI.

### TEOREMA.

*Due parallele sono da per tutto egualmente distanti.*

Siano le due linee (*fig. 40*) AB, CD parallele; dico che saranno da per tutto equidistanti. Fig. 40

Se da due punti presi ad arbitrio s' innalzino sopra AB le due perpendicolari EG, FH, le rette EG, FH saran-

no nel medesimo tempo perpendicolari a DC ( *Prop.* 24 ); dico di più che queste rette saranno eguali tra loro.

Poichè tirando GF, gli angoli GFE, FGH, considerati per rapporto alle parallele AB, CD, saranno eguali come alterni-interni (*Scol. Prop.24*); parimente, poichè le rette EG, FH sono perpendicolari ad una medesima retta AB, ed in conseguenza parallele fra loro, gli angoli EGF, GFH, considerati per rapporto alle parallele GE, FH, saranno eguali come alterni-interni; dunque i due triangoli EFG, FGH ànno un lato comune FG adiacente a due angoli respettivamente eguali; dunque questi due triangoli sono eguali ( *Prop.* 7); dunque il lato EG che misura la distanza nelle parallele AB, CD dal punto E, è eguale al lato FH che misura la distanza di queste medesime parallele dal punto F. Quindi *due parallele* etc. C. B. D. (*a*).

---

(a) *In conseguenza di quanto dicemmo avanti, leggasi in questa nota la teorica delle parallele secondo l'andamento di Euclide.*

## PROPOSIZIONE A.

### TEOREMA.

Prolungandosi un lato di qualunque triangolo, l'angolo esterno è maggiore di qualsivoglia dei due interni ed opposti.

*Sia il triangolo ABC* ( tavola 7 bis, fig. 1 ), *ed un lato BC di esso si prolunghi in D; dico l'angolo esterno ACD essere maggiore di qualsivoglia dei due interni ed opposti, cioè a dire CBA, BAC.*

*Infatti intendasi divisa per metà la AC in E; e la congiunta BE prolunghisi in F; e pongasi la EF eguale alla BE; congiungasi ancora FC, e la AC prolunghisi in G.*

*Perciocchè la AE è eguale alla EC, e la BE alla EF, le due AE, EB sono eguali alle due CE, EF respettivamente, e l'angolo AEB è eguale all' angolo CEF, essendo opposti al vertice; adunque la base AB è eguale alla base FC, il triangolo AEB eguale al triangolo CEF, ed i rimanenti angoli eguali ai rimanenti angoli respettivamente; onde l'angolo BAE è eguale all'angolo ECF; dunque l'angolo ACD è maggiore dell' angolo BAC. Similmente divisa*

## PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

*Se due angoli ànno i lati paralleli respettivamente e diretti nel medesimo senso, questi due angoli saranno eguali.*

Siano i due angoli ( *fig. 41* ) BAC, DEF che ànno il lato AB parallelo al lato DE, il lato AC parallelo al lato

Fig. 41.

---

*per metà la retta BC; si dimostrerà eziandio l' angolo BCG cioè ACD* [ *che sono eguali fra loro, perchè opposti al vertice* ] *maggiore dell' angolo ABC. Laonde* prolungandosi etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE B.

TEÒREMA.

Se cadendo una linea retta sopra due altre linee rette faccia gli angoli alterni fra loro eguali, queste rette saranno parallele.

*La linea retta EF cadendo* ( tav. 7 bis, fig. 2 ) *sopra le due AB, CD, faccia gli angoli alterni AGO, GOD fra loro eguali; dico la linea retta AB essere parallela alla CD.*

*Perciocchè se non è parallela, le AB, CD prolungate concorreranno insieme o verso la parte BD o verso la parte AC: si prolunghino e concorrano dalla parte BD in un punto X. Adunque l' angolo esterno AGO* ( Prop. A ) *del triangolo XGO è maggiore dello interno ed opposto GOX; ma gli è eguale, ciò che è impossibile. Onde le rette AB, CD prolungate non concorreranno dalla parte BD; e si dimostrerà parimente non concorrere dalla parte AC. Ma quelle rette che prolungate non concorrono in alcuna delle parti, sono fra loro parallele; dunque AB è parallela a CD. Quindi* se cadendo una linea etc. C. B. D.

EF; dico l'angolo BAC essere eguale all'angolo DEF. Prolunghisi, se è necessario, DE finchè incontri AC

---

## PROPOSIZIONE C.

### TEOREMA.

Se cadendo una linea retta sopra due altre linee rette faccia l'angolo esterno eguale allo interno ed opposto dalla medesima parte, ovvero gli angoli interni e della medesima parte eguali a due retti, queste rette saranno parallele.

*La linea retta EF* (tav. 7 bis, fig. 3) *cadendo sopra le due rette AB, CD faccia l'angolo esterno EGB eguale allo interno ed opposto dalla medesima parte GOD, ovvero gli angoli interni e dalla medesima parte BGO, GOD eguali a due retti; dico la linea AB esser parallela a CD.* *Infatti, poichè l'angolo EGB è eguale all'angolo GOD, ed allo stesso EGB è eguale l'angolo AGO, perchè opposti al vertice, sarà ancora l'angolo AGO eguale all'angolo GOD: ma sono alterni; dunque AB è parallela a CD* ( Prop. B ). *Oltre a ciò, poichè gli angoli BGO, GOD si sono supposti eguali a due retti, gli angoli AGO, BGO sono ancora eguali a due retti; saranno gli angoli AGO, BGO eguali agli angoli BGO, GOD; tolgasi il comune angolo BGO, sarà il rimanente AGO eguale al rimanente GOD: ma sono alterni; dunque la AB sarà parallela alla CD. Quindi* se cadendo etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE D.

### TEOREMA.

Cadendo una linea retta sopra le linee rette parallele, farà gli angoli alterni fra loro eguali, lo esterno eguale allo interno ed opposto e dalla medesima parte; e gl'interni e dalla medesima parte eguali a due retti.

*Cada sopra le linee rette parallele AB, CD*(tav. 7 bis, fig. 4) *la linea retta EF; dico gli angoli alterni AGO, GOD essere eguali fra loro; e l'angolo esterno EGB eguale allo interno ed opposto e dalla medesima parte GOD; e gli an-*

in G; l'angolo DEF è eguale a DGC, come interni-esterni, essendo EF parallela a GC (*Prop. 24*); ma l'angolo DGC

---

*goli interni e dalla medesima parte BGO, GOD eguali a due retti.*

*Perciocchè se non è l' angolo AGO eguale all' angolo GOD, uno di essi sarà maggiore, e sia AGO maggiore. E perchè l'angolo AGO è maggiore dell'angolo GOD, aggiungasi di comune BGO; gli angoli dunque AGO, BGO sono maggiori degli angoli BGO, GOD. Ma gli angoli AGO, BGO sono eguali a due retti [poichè ogni retta che ne incontra un'altra fa con questa due angoli adiacenti, la cui somma è eguale a due retti]; sicchè gli angoli BGO, GOD sono minori di due retti. Ma quelle rette che fanno con una terza retta gli angoli interni dalla medesima parte minori di due retti prolungate indefinitamente concorrono fra loro; dunque le linee rette AB, CD prolungate indefinitamente concorreranno fra loro: ma non concorrono, essendosi supposte parallele; adunque l' angolo AGO non è diseguale all' angolo GOD, ma però eguale. Ed è l'angolo AGO eguale all' angolo EGB perchè opposti al vertice; dunque ancora EGB è eguale a GOD; aggiungasi a questi di comune BGO, saranno gli angoli EGB, BGO eguali agli angoli BGO, GOD; ma gli angoli BGE, BGO sono eguali a due retti; [poichè ogni retta che ne incontra un' altra fa con questa due angoli adiacenti, la cui somma è eguale a due retti]; dunque ancora gli angoli BGO, GOD saranno eguali a due retti. Laonde* cadendo una linea *etc. C. B. D.*

SCOLIO.

*La dimostrazione del presente teorema dipende da quel principio:* se due linee rette secate da un' altra facciano gli angoli interni, posti dalla medesima parte, minori di due retti, tali due linee prolungate indefinitivamente s' incontreranno dalla parte ove gli angoli sono minori di due retti: *principio che* Euclide *pose fra concessioni geometriche, poichè strettamente parlando non ammette dimostrazione, e quante finora se ne sono tentate, tutte racchiudono dei paralogismi.*

è eguale all'angolo BAC per la stessa ragione ; dunque l' angolo BAC è eguale a DEF ( *Ass. 1*). Quindi *se due angoli* etc. C. B. D.

*Scolio.* Si mette in questa proposizione la restrizione che il lato EF sia diretto nel medesimo senso di AC, ed ED nel medesimo senso di AB; la ragione è che se prolunghisi EF verso H, l'angolo DEH avrà i suoi lati paralleli a quelli dell' angolo BAC: ma questo non gli sarebbe eguale ; in tal caso l' angolo DEH e l'angolo BAC farebbero insieme due angoli retti.

---

## PROPOSIZIONE E.

### TEOREMA.

L'angolo esterno di ogni triangolo, prolungandosi un lato, è eguale ai due interni ed opposti; ed i tre angoli del triangolo sono eguali a due retti.

*Sia il triangolo ABC* ( tavola 7 bis , fig. 5 ), *ed un lato BC di esso prolunghisi in D; dico l' angolo esterno ACD essere eguale ai due interni ed opposti CAB, ABC; ed i tre angoli ABC , BCA , CAB del triangolo essere eguali a due retti.*

*Intendasi tirata pel punto C la linea retta CE parallela alla AB. E perchè AB è parallela a CE, ed in esse cade la CA , gli angoli alterni BAC, ACE sono eguali fra loro* ( Prop. D ). *Similmente perchè AB è parallela a CE , ed in esse cade la BD , l' angolo esterno ECD è eguale allo interno ed opposto ABC* ( Prop. D ) : *ma si è dimostrato l' angolo ACE eguale all' angolo BAC ; adunque l' angolo esterno ACD è eguale ai due interni ed opposti CAB, ABC. Pongasi ACB comune, saranno gli angoli ACD, ACB eguali ai tre CBA, BAC, ACB: ma gli angoli ACD , ACB sono eguali a due retti , perchè ogni retta che ne incontra un' altra fa con questa due angoli adiacenti , la cui somma è eguale a due retti ; dunque ancora gli angoli CBA , BAC , ACB sono eguali a due retti. Quindi* l' angolo esterno *etc. C. B. D.*

( Il Trad. )

## PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

*In ogni parallelogrammo i lati opposti sono eguali, come ancora gli angoli opposti.*

Sia il parallelogrammo ( *fig.* 44 ) ABCD ; dico che il lato AB è eguale al lato DC , il lato AD eguale al lato BC ; dippiù l' angolo A eguale all' angolo C, e l'angolo D all' angolo B. Fig. 44.

Tirisi la diagonale BD; i due triangoli ADB, DBC ànno il lato comune BD ; di più per le parallele AD, BC, l' angolo ADB è eguale a DBC ( *Prop.* 24 ), come alterni-interni, e per le parallele AB, CD l'angolo ABD è eguale all'angolo BDC; dunque i due triangoli ADB, DBC (*Prop.*7) sono eguali ; dunque il lato AB opposto all'angolo ADB è eguale al lato DC opposto all'angolo DBC; e parimente il terzo lato AD è eguale al terzo lato BC ; dunque i lati opposti di un parallelogrammo sono eguali.

In secondo luogo, dalla eguaglianza dei medesimi triangoli ne segue che l'angolo A è eguale all'angolo C , e che dippiù l'angolo ADC, composto dai due angoli ADB, BDC è eguale all' angolo ABC composto dai due angoli DBC, ABD ; dunque gli angoli opposti di un parallelogrammo sono eguali. Quindi *in ogni parallelogrammo* etc. C.B.D.

*Corollario*. Dunque le due parallele AB, CD, comprese fra due altre parallele AD, BC, sono eguali.

## PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

*Se in un quadrilatero i lati opposti sono eguali, i lati eguali saranno paralleli , e la figura sarà un parallelogrammo.*

Sia il quadrilatero ABCD ( *fig.* 44 ) che abbia il lato AB eguale a CD , ed il lato AD eguale a BC; dico che AB è parallela a DC , ed AD a BC , ed il quadrilatero ABCD essere un parallelogrammo. Fig. 44.

Infatti tirando la diagonale BD, i due triangoli ABD, BDC avranno i tre lati eguali respettivamente ; dunque saranno eguali ( *Prop.* 11 ) ; quindi l'angolo ADB opposto al lato AB è eguale all' angolo DBC opposto al lato CD ; onde ( *Prop.* 24 ) il lato AD è parallelo a BC, per la stessa ragione AB è parallelo a DC ; dunque il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo. Quindi *se in un quadrilatero* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

*Se in un quadrilatero due lati opposti sono eguali e paralleli, gli altri due saranno similmente eguali e paralleli, e la figura sarà un parallelogrammo.*

Fig. 44. Siano i due lati opposti (*fig. 44*) AB, CD del quadrilatero ABCD eguali e paralleli; dico che gli altri due AD, BC saranno similmente eguali e paralleli, ed il quadrilatero ABCD sarà un parallelogrammo.

Tirisi la diagonale BD. Poichè AB è parallela a CD, gli angoli alterni ABD, BDC sono eguali (*Prop. 24*); d' altronde il lato AB è eguale al lato CD, il lato DB è comune; dunque il triangolo ABD è eguale al triangolo DBC (*Prop. 6*); dunque il lato AD è eguale al lato BC; l' angolo ADB eguale all' angolo DBC; ed in conseguenza AD è parallela a BC; dunque ABCD è un parallelogrammo. Quindi *se in un quadrilatero* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

*Le due diagonali di un parallelogrammo si tagliano scambievolmente per metà.*

Fig. 45. Siano le due diagonali (*fig. 45*) AC, BD del parallelogrammo ABCD, che si tagliano nel punto O; dico essere AO eguale ad OC, e DO ad OB.

Poichè paragonando il triangolo ADO col triangolo BOC, si trova il lato AD eguale a CB, l' angolo ADO eguale all' angolo CBO (*Prop. 24*), e l' angolo DAO eguale ad OCB; dunque questi due triangoli sono eguali (*Prop. 7*); dunque AO, lato opposto all' angolo ADO, è eguale ad OC, lato opposto all' angolo OBC eguale ad ADO; dunque anche DO è eguale ad OB. Quindi *le due diagonali* etc. C. B. D.

*Scolio*. Nel caso del rombo i lati AB, BC essendo eguali, i triangoli AOB, OBC ànno i tre lati respettivamente eguali, e sono per conseguenza eguali; d' onde segue che l' angolo AOB è eguale all' angolo BOC, e quindi le due diagonali di un rombo si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

# LIBRO SECONDO

## IL CIRCOLO E LA MISURA DEGLI ANGOLI

### DEFINIZIONI

I. La *circonferenza del circolo* è una linea curva, tutti i punti della quale sono egualmente distanti da un punto interno che chiamasi *centro* ( *fig. 46* ). Il *circolo* (*a*) è lo spazio terminato da questa linea curva. Fig. 46.

*N. B* Qualche volta nel discorso si confonde il circolo con la sua circonferenza ; ma sarà sempre facile di ristabilire l'esattezza dell'espressioni, ricordandosi che il circolo è una superficie che à lunghezza e larghezza, mentre la circonferenza non è che una linea.

II. Ogni linea retta CA , CE , CD etc. condotta dal centro alla circonferenza si chiama *raggio* o *semi-diametro*. Ogni retta , come AB , che passa pel centro , e che è terminata da ambe le parti della circonferenza, si chiama *diametro* (*b*).

In conseguenza della definizione del circolo, tutti i raggi sono eguali ; tutti i diametri sono pure eguali e doppî del raggio.

III. Si chiama *arco* una porzione di circonferenza come FHG.

La *corda* o *sottesa* dell'arco è la linea retta FG che congiunge le due estremità di esso.

(*a*) Circolo, *dal latino* circulus *diminut. di* κιρκος ( *circos* ) circolo.

(*b*) Diametro, *da* διὰ ( *dia* ) per, *e da* μετρον (*metron*) misura. ( Il Trad. ).

IV. *Segmento* è la superficie o porzione di circolo compresa fra l' arco e la corda.

*N. B.* Alla medesima corda FG corrispondono sempre due archi FHG, FEG, e per conseguenza ancora due segmenti ; ma s' intende sempre parlare del minore, a meno che non si esprima il contrario.

V. *Settore* è la porzione del circolo compresa tra un arco DE e due raggi CD, CE, tirati alle estremità dell' arco.

VI. Si chiama *linea iscritta nel circolo* quella le cui estremità sono alla circonferenza, come AB (*fig. 47*). Fig. 47.

*Angolo iscritto*, un angolo come BAC, il vertice del quale è alla circonferenza, e che è formato da due corde.

*Triangolo iscritto*, un triangolo come BAC, i tre angoli del quale ànno i respettivi vertici alla circonferenza.

In generale *figura iscritta*, quella della quale tutti gli angoli ànno i vertici alla circonferenza : nel tempo stesso si dice che il circolo è *circoscritto* ad una tale figura.

VII. Si chiama *secante* una linea che incontra la circonferenza in due punti ; tale è *b* AB (*fig. 48*). Fig. 48.

VIII. *Tangente* è una linea che non à che un sol punto di comune con la circonferenza ; tale è CD.

Il punto M chiamasi *punto di contatto*.

IX. Similmente due circonferenze sono *tangenti* l'una dell' altra, allorchè esse non ànno che un sol punto di comune.

Fig. 160. X. Un poligono (*fig. 160*) è *circoscritto ad un circolo*, quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza ; in questo caso si dice che il circolo è *iscritto* nel poligono.

## PROPOSIZIONE PRIMA.

### TEOREMA.

*Ogni diametro divide il circolo e la circonferenza in due parti eguali.*

Fig. 49. Sia il diametro AB (*fig. 49*) del circolo terminato dalla circonferenza AFBE ; dico che il diametro AB divide il circolo e la circonferenza in due parti eguali.

Poichè se si applichi la figura AEB sopra AFB, con-

servando la base comune AB, bisognerà che la linea curva AEB cada esattamente sopra la linea curva AFB; altrimenti si avrebbero nell'una o nell'altra dei punti disegualmente lontani dal centro; il che è contro la definizione del circolo; dunque dovranno combaciare perfettamente, e quindi saranno eguali. Dunque *ogni diametro* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE II.

### TEOREMA.

*Ogni corda è minore del diametro.*

Sia il circolo che à per circonferenza AEBF (*fig. 49*), ed in esso siavi la corda AD ed il diametro AB; dico che la corda AD è minore del diametro AB. Fig. 49.

Infatti se alle estremità della corda AD si conducano i raggi AC, CD, si avrà la retta AD minore di AC più CD, ovvero di AC più CB, essendo CD eguale a CB (*Def. 2*): ma AC più CB è il diametro AB; dunque la corda AD è minore di AB.

Quindi *ogni corda* etc. C. B. D.

*Corollario.* Dunque la maggior linea retta che si possa iscrivere in un circolo è eguale al suo diametro.

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

*Ogni linea retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.*

Poichè se la incontrasse in tre, questi tre punti sarebbero egualmente distanti dal centro; vi sarebbero dunque tre rette eguali condotte da uno stesso punto sopra una medesima linea retta, ciò che è impossibile (*Prop. 16*, *Corol. 2*, *lib. 1.*). Dunque *ogni linea* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IV.

### TEOREMA.

*In un medesimo circolo od in circoli eguali gli archi eguali sono sottesi da corde eguali, e reciprocamente le corde eguali sottendono archi eguali.*

Fig. 50. Sia il raggio AC (*fig.* 50) eguale al raggio EO, o l' arco AMD eguale all' arco ENG; dico che la corda AD sarà eguale alla corda EG.

Poichè essendo il diametro AB eguale al diametro EF, il semicircolo AMDB potrà applicarsi esattamente sopra il semicircolo ENGF, e la linea curva BMDB coinciderà esattamente con la linea curva ENGF: ma si suppone la parte AMD eguale alla parte ENG; dunque il punto D cadrà sopra il punto G; e cadendo il punto A sopra il punto E, il punto D sopra il punto G, le rette che uniscono questi punti dovranno coincidere perfettamente, e quindi saranno eguali; dunque la corda AD sarà eguale alla corda EG.

Reciprocamente, supponendo sempre il raggio AC eguale ad EO, se la corda AD è eguale alla corda EG; dico l' arco AMD essere eguale all' arco ENG.

Poichè tirando i raggi CD, OG, i due triangoli ACD, EOG avranno i tre lati respettivamente eguali, cioè AC eguale ad EO, CD eguale ad OG, ed AD eguale ad EG; dunque questi triangoli sono eguali (*Prop.* 11, *lib. I*), e perciò l' angolo ACD è eguale all' angolo EGF; poichè l' angolo ACD è eguale ad EOG, è chiaro che il raggio CD cadrà sul raggio OG, ed il punto D sopra il punto G; e cadendo il punto A sopra il punto E, il punto D sopra il punto G, e tutta la curva AMDB combaciando con tutta la curva ENGF; anche la porzione AMD combacerà e sarà eguale alla porzione ENG. Quindi *in un medesimo circolo* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

*Nel medesimo circolo od in circoli eguali, un arco maggiore è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente, purchè gli archi dei quali si tratta siano minori della semicirconferenza.*

Sia l'arco AH (*fig. 50*) maggiore dell' arco AD; dico che la corda AH è maggiore della corda AD. Fig. 50.

Conducansi i raggi CD, CH; i due lati AC, CH del triangolo ACH sono eguali ai due lati AC, CD del triangolo ACD; l' angolo ACH è maggiore dell' angolo ACD; dunque (*Prop. 10, lib. I*) il terzo lato AH è maggiore del terzo lato AD; onde la corda maggiore è quella che sottende l' arco maggiore.

Reciprocamente, se la corda AH suppongasi maggiore di AD, si conchiuderà dagli stessi triangoli, che l'angolo ACH è maggiore di ACD, e perciò l'arco AH è maggiore di AD. Quindi *nel medesimo* etc. C. B. D.

*Scolio.* Si suppone che gli archi dei quali si tratta siano minori della semicirconferenza. Se dessi fossero maggiori la proprietà contraria avrebbe luogo; cioè l' arco aumentandosi, la corda diminuirebbe, e reciprocamente; così essendo l' arco AKBD maggiore di AKBH, la corda AD del primo è minore della corda AH del secondo.

## PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

*Ogni raggio perpendicolare ad una corda divide questa corda in due parti eguali, come ancora divide in due parti eguali l' arco sotteso.*

Sia il raggio CG (*fig. 51*) perpendicolare alla corda AB; dico questa corda e l'arco sotteso AGB essere ambidue divisi in due parti eguali. Fig. 51.

Tirinsi i raggi CA, CB; questi raggi sono, per rapporto alla perpendicolare CD, due obblique eguali; dunque si allontanano egualmente dalla perpendicolare (*Prop. 16, lib. 1*); onde AD è eguale a DB.

In secondo luogo, poichè AD è eguale a DB, CG è una perpendicolare innalzata alla metà di AB; dunque (*Prop. 17*, *lib. I*) ogni punto di questa perpendicolare dev' essere egualmente distante dalle due estremità A e B. Il punto G è uno di questi punti; dunque la distanza AG è eguale a GB. Ma se la corda AG è eguale alla corda GB, l'arco AG sarà eguale all' arco GB (*Prop. 4*); dunque il raggio CG, perpendicolare alla corda AB, divide l' arco sotteso da questa corda in due parti eguali nel punto G. Quindi *ogni raggio* etc. C. B. D.

*Scolio*. Il centro C, il punto medio D della corda AB, ed il punto medio G dell'arco sotteso da questa corda sono tre punti situati sopra una medesima retta perpendicolare alla corda. Ora bastano due punti per determinare la posizione di una linea retta; dunque ogni linea che passa per due di questi punti, passerà necessariamente pel terzo, e sarà perpendicolare alla corda.

Ne segue pure che *la perpendicolare innalzata al punto medio di una corda passa per lo centro e pel punto medio dell' arco sotteso dalla medesima corda*.

Infatti questa perpendicolare è la stessa di quella che si abbasserebbe dal centro sopra la medesima corda, giacchè passano ambedue pel punto medio della stessa corda.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

*Per tre punti non in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza, ma non se ne può far passare che una sola.*

Fig. 52. Siano (*fig. 52*) A, B, C i tre punti non in linea retta; dico per questi si può sempre far passare una sola circonferenza.

Congiungansi le AB, BC, ed intendansi divise queste rette in due parti eguali dalle perpendicolari DE, FG; dico primieramente che queste perpendicolari s' incontreranno nel punto O.

Infatti le linee DE, FG si taglieranno necessariamente se non sono parallele. Ora supponiamo che fossero parallele, la linea AB, perpendicolare a DE, sarebbe perpendicolare a FG (*Prop. 24, lib. I*), e l' angolo in K sarebbe retto: ma BK prolungamento di BD è differente di BF, poichè i

tre punti A, B, C non sono in linea retta; dunque vi sarebbero due perpendicolari BF, BK abbassate da uno stesso punto sopra la medesima retta, lo che è impossibile (*Prop. 15, lib. I*); dunque le perpendicolari DE, FG si taglieranno sempre in un punto O.

Adesso il punto O, come appartenente alla perpendicolare DE, è ad egual distanza dai due punti A e B (*Prop. 17, lib. I*); il medesimo punto O, come appartenente alla perpendicolare FG, è ad egual distanza dai due punti B e C; dunque le tre distanze OA, OB, OC sono eguali; e perciò la circonferenza descritta col centro O e col raggio OB passerà per i tre punti A, B, C.

Resta così dimostrato che si può sempre far passare una circonferenza per tre punti dati non in linea retta; dico di più che non se ne può far passare che una sola.

Poichè, se vi fosse una seconda circonferenza che passasse per i tre punti dati A, B, C, il suo centro non potrebbe esser fuori della linea DE (*Prop. 17, lib. I*), perchè desso allora sarebbe disegualmente lontano da A e da B; non potrebbe essere neppure fuori della linea FG, per simile ragione; dunque sarebbe nel tempo stesso sopra le due linee DE, FG. Or due linee rette non possono tagliarsi in più di un punto; dunque, essendo lo stesso il centro, non vi è che una sola circonferenza che possa passare per tre punti dati non in linea retta. Quindi *per tre punti* etc. C. B. D.

*Corollario*. Due circonferenze non possono incontrarsi in più di due punti; poichè se avessero tre punti comuni, avrebbero il medesimo centro, e non farebbero che una sola e medesima circonferenza.

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA.

*Due corde eguali sono egualmente lontane dal centro; e di due corde diseguali la minore è più distante dal centro.*

1.° Sia la corda (*fig. 53*) AB eguale alla corda DE; dico essere egualmente lontane dal centro. Fig. 53.

Intendansi divise queste corde in due parti eguali con le perpendicolari CF, CG, le quali s' incontreranno nel centro C (*Scolio Prop. 6*); e tirinsi i raggi CA, CD.

I triangoli rettangoli CAF, DCG ànno le ipotenuse CA, CD eguali; di più il lato AF metà di AB è eguale al lato

DG metà di DE; dunque questi triangoli sono eguali (*Prop. 18, lib. I*), ed il terzo lato CF è perciò eguale al terzo lato CG: ma queste rette misurano le distanze che il centro serba dalle corde; dunque le due corde eguali AB, DE sono egualmente distanti dal centro.

2.° Sia la corda AH maggiore di DE; dico che DE minore sarà più distante dal centro.

Essendo la corda AH maggiore di DE, l'arco AKH sarà maggiore dell' arco DME (*Prop. 5*); sopra l' arco AKH prendasi la parte ANB eguale a DME; tirisi la corda AB e si intenda abbassata CF perpendicolare sopra questa corda, e CI perpendicolare sopra AH; è chiaro che CF è maggiore di CO, e CO è maggiore di CI (*Prop. 16, lib. I*); dunque con più ragione CF è maggiore di CI. MA CF è eguale a CG, poichè le corde AB, DE sono eguali; dunque si à CG maggiore di CI: ma queste rette misurano le distanze che il centro serba dalle corde, e perciò la minore di due corde diseguali è più distante dal centro. Quindi *due corde* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IX.

### TEOREMA.

*La perpendicolare innalzata all' estremità di un raggio è una tangente alla circonferenza.*

Fig. 54. Se all' estremità del raggio CA (*fig. 54*) s' intenda innalzata la perpendicolare BD; dico essere BD una tangente alla circonferenza.

Tirinsi dal centro C quante obblique si voglIano sulla BD; sia per esempio CE una di queste: siccome ogni obbliqua CE è maggiore della perpendicolare CA raggio del circolo (*Prop. 16, lib, I*), perciò il punto E è fuori del circolo; così si dimostrerebbe esser fuori del circolo qualunque altro punto della linea BD, eccettuato il solo punto A, estremo del raggio cui è perpendicolare; dunque la linea DB non avendo che il solo punto A di comune colla circonferenza è una tangente (*Def. 8*). Quindi *la perpendicolare* etc. C. B. D.

*Scolio*. Non si può condurre da un punto dato A se non che una sola tangente AD alla circonferenza; poichè se si potesse condurne altra, questa non sarebbe più perpendicolare al raggio CA; dunque per rapporto a questa nuova tangente il raggio CA sarebbe un' obbliqua, e la

perpendicolare abbassata dal centro sopra questa tangente sarebbe minore di CA; dunque questa presente tangente entrerebbe nel cerchio, e sarebbe invece una secante.

## PROPOSIZIONE X.

### TEOREMA.

*Due parallele intercettano sopra una circonferenza archi eguali.*

Siano le due parallele AB, DE (*fig. 55*); dico che Fig. 55. queste intercettano sopra la circonferenza gli archi eguali MN, PQ.

Possono accadere tre casi:

1.° Se le due parallele sono secanti.

2.° Se una è secante, e l'altra tangente.

3.° Se ambedue sono tangenti.

*1.° Caso.* Intendasi tirato il raggio CH perpendicolare alla corda MP; esso sarà nel medesimo tempo perpendicolare alla sua parallela NQ (*Prop. 24, lib. I*); dunque il punto H sarà ad un tempo stesso il mezzo dell'arco MHP, e quello dell'arco NHQ (*Prop. 6*); si avrà dunque l'arco MH eguale ad HP, l'arco NH eguale ad HQ; da ciò resulta MH meno NH eguale ad HP meno HQ (*Ass. 7*), cioè a dire MN eguale a QP.

*2.° Caso.* Al punto del contatto H (*fig. 56*) tirisi Fig. 56. il raggio CH; questo raggio sarà perpendicolare alla tangente DE (*Prop. 9*) ed alla sua parallela MP. Ma poichè CH è perpendicolare alla corda MP, il punto H è il punto medio dell'arco MHP; dunque gli archi MH, HP, compresi tra le parallele AB, DE, sono eguali.

*3.° Caso.* Siano le due parallele DE, IL tangenti una in H, l'altra in K; intendasi condotta la secante parallela AB, e si avrà per quello che abbiam dimostrato MH eguale ad HP, ed MK eguale a KP; dunque l'arco intero HMK è eguale ad HPK; e si vede inoltre che ciascuno di questi archi è una mezza circonferenza. Quindi *due parallele intercettano* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XI.

### TEOREMA.

*Se due circonferenze si tagliano, la linea retta che passa per i loro centri sarà perpendicolare alla corda che unisce i punti d' intersezione, e la dividerà in due parti eguali.*

Fig. 57 e 58. Siano le due circonferenze che si tagliano nei punti (*fig. 57 e 58*) A e B; dico la linea CD che passa per i due centri essere perpendicolare alla corda AB che unisce i due punti d'intersezione, e dividerla in due parti eguali.

Infatti la linea AB che unisce i punti d'intersezione è una corda comune ai due circoli. Or, se alla metà di questa corda si tirasse una perpendicolare, essa dovrebbe passare per ciascuno dei due centri C e D (*Prop. 6*). Ma per due punti dati non può condursi che una sola linea retta; dunque la linea retta che passa per i centri sarà perpendicolare alla corda, e passerà pel punto medio di essa. Quindi *se due circonferenze* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XII.

### TEOREMA.

*Se la distanza di due centri è minore della somma dei raggi, e se nello stesso tempo il raggio maggiore è minore della somma del raggio minore e della distanza dei centri, i due circoli si taglieranno.*

Fig. 57 e 58. Sia la CD (*fig. 57 e 58*), distanza dei due centri, minore della somma dei raggi AC più AD, e nello stesso tempo il raggio maggiore AD sia minore di AC, raggio minore, più CD, distanza dei centri; dico i due circoli si taglieranno.

Infatti, affinchè abbia luogo l'intersezione bisogna che il triangolo CAD sia possibile; è necessario dunque che non solamente CD sia minore di CA più AD, ma ancora AD raggio maggiore sia minore di AG più CD. Ora ogni volta che il triangolo CAD potrà esser costrutto, è chiaro che le circonferenze descritte coi centri C e D si taglieranno in A e B. Quindi *se la distanza* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

*Se la distanza dei centri di due circoli è eguale alla somma dei loro raggi, questi due circoli si toccheranno esternamente.*

Sia la distanza CD ( *fig. 59*) dei due centri eguale alla somma dei raggi CA , DA ; dico che i due circoli si toccheranno esternamente. Fig. 59.

È chiaro che avranno il punto A comune, ma dessi non avranno che questo punto solo ; poichè per avere due punti comuni, bisognerebbe che la distanza dei centri fosse minore della somma dei raggi ( *Prop. prec.* ). Quindi *se la distanza* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

*Se la distanza dei centri di due circoli è eguale alla differenza dei loro raggi, questi circoli si toccheranno internamente.*

Sia la distanza ( *fig. 60* ) CD dei due centri eguale alla differenza dei raggi AC, AD ; dico questi circoli si toccheranno internamente. Fig 60.

Primieramente è chiaro che questi circoli ànno il punto A comune ; non ne possono avere alcun altro ; poichè altrimenti bisognerebbe che il raggio maggiore AD fosse minore della somma del raggio AC e della distanza dei centri CD ( *Prop. 12* ), il che non à luogo. Quindi *se la distanza* etc. C. B. D.

*Corollario.* Dunque se due circoli si toccano tanto internamente, quanto esternamente, i centri ed il punto di contatto sono nella medesima linea retta.

*Scolio*. Tutti i circoli che ànno i loro centri ( *fig. 59* e *60*) sopra la retta CD, e che passano per lo punto A, sono tangenti gli uni degli altri, cioè non ànno fra loro che il solo punto A di comune. E se per lo punto A si conduca Fig. 59 e 60.

AE perpendicolare a CD, la retta AE sarà una tangente comune a questi circoli (*a*).

---

(a) *Nella proposizione XII pare che* Legendre *non dimostri ciò che à stabilito con l' enunciato, cioè la intersezione dei due circoli, ma anzi ripete in parte l'enunciato stesso; quindi per esporre con più chiarezza questa teorica delle intersezioni dei circoli, non che dei loro contatti, stimiamo far precedere queste due proposizioni seguenti; trattando poi diversamente la XII, XIII e XIV dell' Autore.*

## PROPOSIZIONE X.

### TEOREMA.

Se due circoli ànno un punto comune da una parte della retta che unisce i loro centri, ne avranno un altro dalla parte opposta della stessa retta.

*Siano A e B* ( tav. 7 bis, fig. 6 ) *i centri di due circoli che ànno il punto C comune fuori della retta AB; dico che ne avranno un altro dalla parte opposta della stessa retta AB.*

*Dal punto C intendasi abbassata la perpendicolare CD e prolungata al punto E, di modo che sia DE eguale a DC; congiungansi le rette, BC, BE, AC, AE. Essendo CD eguale a DE, il lato DB comune, gli angoli CDB, EDB eguali, perchè retti; i due triangoli BDC, BDE saranno eguali, perchè ànno un angolo eguale, compreso da due lati eguali; quindi sarà CB eguale a BE, dunque il punto E sta sopra la circonferenza del cerchio che à per centro B; similmente si dimostrerebbe essere sulla circonferenza del cerchio avente per centro A; dunque dovendosi trovare nello stesso tempo sopra le due circonferenze, si troverà sopra la comune loro intersezione, dalla parte opposta della retta AB. Quindi* se due circoli *etc.* C. B. D.

## PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

*Nel medesimo circolo od in circoli eguali, e gli angoli eguali, i vertici dei quali sono al centro, intercettano sopra la circonferenza archi eguali. Reciprocamente, se gli archi sono eguali, saranno intercettati da angoli eguali.*

1.° Siano gli angoli (*fig. 61*) ACB, DCE eguali nello stesso circolo od in circoli eguali, aventi i vertici al centro; dico che intercettano gli archi AB, DE eguali.

Fig. 61.

---

## PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Se due circoli si toccano, la retta che unisce i loro centri passerà per lo contatto.

*Siano i due circoli ABC, DBE* (tav. 7 bis, fig. 7) *che si toccano in B; dico che la retta GF, la quale unisce i loro centri G, F, passa per lo contatto.*

*Infatti se il punto di contatto non cadesse sopra la retta GF, dovrebbe trovarsi dall' una o dall' altra parte della retta GF, e quindi i circoli avrebbero un altro punto di comune dalla parte opposta* (Prop. prec.), *e perciò allora le circonferenze non sarebbero tangenti, ma secanti, lo che è contro la supposizione; quindi la linea GF dovrà passare per lo contatto. Dunque* se due circoli etc. C. B. D.

Corollario. *Da ciò ne segue che se due circoli si toccano, la distanza dei centri è eguale o alla somma od alla differenza dei raggi, secondochè si toccano esternamente od internamente.*

Scolio. *È evidente inoltre che se la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi, le due circonferenze non s' intersecano nè si toccano, ma sono distanti l'una dall' altra, e viceversa* (tav. 7 bis, fig. 8). *E che se la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi, cioè se il raggio maggiore è più grande della somma del raggio minore e della distanza dei centri, la circonferenza maggiore circonda la minore* (tav. 7 bis, fig. 9), *e viceversa.*

Poichè se l'angolo ACB è eguale all' angolo DCE, questi due angoli potranno situarsi l'uno sopra l'altro; e siccome i loro lati sono eguali, è chiaro che il punto A ca-

---

## PROPOSIZIONE XII.

### TEOREMA.

Se la distanza di due centri è minore della somma dei raggi, e se nello stesso tempo il raggio maggiore è minore della somma del raggio minore e della distanza dei centri, i due circoli si taglieranno.

*Sia CD* ( fig. 57 e 58 ), *distanza dei due centri, minore della somma dei raggi AC più AD, e nello stesso tempo il raggio maggiore AD sia minore di AC, raggio minore, più CD, distanza dei centri; dico che i due circoli si taglieranno.*

*Infatti se le due circonferenze non s' intersecassero, dovrebbero essere o tangenti o distanti l' una dall'altra, o l'una racchiusa entro l'altra: nel primo caso dovrebbe essere la distanza dei centri eguale alla somma o alla differenza dei raggi* ( Corol. Prop. Y ) : *nel secondo* ( Scol. Prop. Y ) *maggiore della somma dei raggi: e nel terzo caso dovrebbe essere* ( Scol. Prop. Y ) *il raggio maggiore più grande della somma della distanza dei centri e del raggio minore. Ma tutte e tre queste conseguenze sono contro l'ipotesi; dunque le due circonferenze debbono intersecarsi. Quindi* se la distanza di due centri etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XIII.

### TEOREMA.

Se la distanza dei centri di due circoli è eguale alla somma dei loro raggi, questi due circoli si toccheranno esternamente.

*Sia la distanza CD* ( fig. 59 ) *dei due centri eguale alla somma dei raggi CA, DA; dico che i due circoli si toccheranno esternamente.*

*Infatti queste due circonferenze ànno, com' è chiaro, il punto A di comune; se avessero un altro punto di comu-*

drà in D, ed il punto B in E. Ma allora l'arco AB deve pure cadere sopra l'arco DE, essendo pure eguali i circoli; poichè se i due archi non si confondessero in un solo, vi sarebbero nell'uno o nell'altro dei punti disegualmente lontani dal centro, lo che è impossibile; dunque l'arco AB dovrà coincidere coll'arco DE, e quindi saranno eguali.

2.° Se si suppone AB eguale a DE, dico che l'angolo ACB è eguale all'angolo DCE. Poichè se questi angoli non sono eguali, sia ACB il maggiore, e sia ACI eguale a DCE; si avrà per ciò che si è dimostrato AI eguale a DE: ma per supposizione DE è eguale ad AB; dunque si avrebbe AB eguale ad AI, ossia la parte eguale al tutto, lo che è impossibile; dunque l'angolo ACB è eguale a DCE. Quindi *nel medesimo circolo* etc. C. B. D.

---

*ne, dovendo essere questo fuori della retta CD, ne avrebbero anche un altro situato dalla parte opposta* (Prop. X) *e quindi due circonferenze diverse avrebbero tre punti di comune, il che è impossibile; dunque le due circonferenze non possono avere che il solo punto A di comune, e perciò si toccano. Quindi* se la distanza etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se la distanza dei centri di due circoli è eguale alla differenza dei loro raggi, questi circoli si toccheranno internamente.

*Sia la distanza CD (fig. 60) dei due centri eguale alla differenza dei raggi AC, AD; dico che questi circoli si toccheranno internamente.*

*Infatti queste due circonferenze ànno, com' è chiaro, il punto A comune; se ne avessero un altro, dovendo essere questo fuori della retta CD, ne avrebbero un altro situato dalla parte opposta* ( Prop. X ); *e quindi due circonferenze diverse avrebbero tre punti di comune, il che è impossibile; dunque le due circonferenze non possono avere che il solo punto A di comune, e perciò si toccano. Quindi* se la distanza etc. C. B. D.

( IL TRAD. )

## PROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

*Nel medesimo circolo od in circoli eguali, se due angoli al centro stanno tra loro come due numeri interi, gli archi intercetti staranno fra loro come i medesimi numeri, e si avrà che gli angoli staranno fra loro come gli archi.*

Nel medesimo circolo od in circoli eguali, se i due angoli al centro (*fig. 62*) ACB, DCE stanno fra loro come due numeri interi; dico che gli archi AB, DE staranno fra loro come i medesimi numeri, e si avrà la proporzione: Angolo ACB : angolo DCE :: arco AB : arco DE.

Fig. 62.

Suppongasi, per esempio, che gli angoli ACB, DCE stiano fra loro come 7 sta a 4; ovvero, ciò che torna lo stesso, suppongasi che l' angolo M, che serve di comune misura, sia contenuto sette volte nell'angolo ACB, e quattro volte all' angolo DCE. Gli angoli parziali AC*m*, *m*C*n*, *n*C*p*, *p*C*q*, *q*C*r*, *r*C*s*, *s*CB, DC*x*, *x*C*y*, *y*C*z*, *z*CE essendo eguali fra loro, gli archi parziali A*m*, *mn*, *nq*, *qr*, *rs*, *s*B, D*x*, *xy*, *yz*, *z*E saranno pure fra loro eguali (*Prop. prec.*); dunque l' arco intero AB starà all' arco intero DE come 7 sta a 4. Ora è evidente che lo stesso ragionamento avrebbe sempre luogo, quando in vece di 7 e 4 si avessero altri numeri qualunque; dunque se il rapporto degli angoli ACB, DCE può essere espresso in numeri interi, gli archi AB, DE staranno fra loro come gli angoli ACB, DCE. Quindi *nel medesimo circolo* etc. C. B. D.

*Scolio.* Reciprocamente se gli archi AB, DE stessero fra loro come due numeri interi, gli angoli ACB, DCE starebbero fra loro come i medesimi numeri, e si avrebbe sempre ACB : DCE :: AB : DE; perchè gli archi parziali A*m*, *mn*, etc. D*x*, *xy* etc. essendo eguali, gli angoli parziali AC*m*, *m*C*n* etc. DC*x*, *x*C*y* etc. sono ancora eguali.

## PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

*Qualunque sia il rapporto di due angoli, questi due angoli saranno sempre fra loro come gli archi intercetti fra i loro lati, e descritti dai loro vertici come centri con raggi eguali.*

Qualunque sia il rapporto dei due angoli (*fig. 63*) ACB, ACD; dico questi due angoli stanno fra loro come gli archi AB, AD intercetti fra i loro lati, e descritti dai loro vertici C, C, con raggi eguali CA, CA. Fig. 63.

Suppongasi l'angolo minore situato in modo che sia compreso dal maggiore; se non è vera la proposizione enunciata, l'angolo ACB starà all'angolo ACD come l'arco AB sta ad un arco maggiore o minore di AD. Sia questo arco maggiore, e rappresentisi con AO; avremo così:

Angolo ACB : angolo ACD :: arco AB : arco AO.

Immaginisi adesso che l'arco AB sia diviso in parti eguali, delle quali ciascuna sia minore di DO; vi sarà almeno un punto di divisione fra D ed O: sia I questo punto, e tirisi CI; gli archi AB, AI staranno fra loro come due numeri interi, e si avrà pel teorema precedente:

Angolo ACB : angolo ACI :: arco AB : arco AI.

Paragonando queste due proporzioni l'una coll'altra, ed osservando che gli antecedenti sono i medesimi, se ne conchiuderà che i conseguenti sono proporzionali, e che perciò:

Angolo ACD : angolo ACI :: arco AO : arco AI.

Ma l'arco AO è maggiore dell'arco AI; bisognerebbe dunque, perchè sussistesse la proporzione, che l'angolo ACD fosse maggiore dell'angolo ACI: ora al contrario esso è minore; dunque è impossibile che l'angolo ACB stia all'angolo ACD come l'arco AB sta ad un arco maggiore di AD.

Si dimostrerebbe con un ragionamento simile che il quarto termine della proporzione non può essere minore di AD; dunque esso è esattamente AD, e si à la proporzione:

Angolo ACB : angolo ACD :: arco AB : arco AD.

Quindi *qualunque sia il rapporto* etc. C. B. D.

*Corollario*. Poichè l'angolo al centro del circolo e l'arco intercetto fra i suoi lati ànno un tale legame, che quan-

do l'uno aumenta o diminuisce in un rapporto qualunque, l' altro aumenta o diminuisce nel rapporto medesimo; si può dunque stabilire una di queste grandezze per misura dell' altra: laonde si prenderà da ora innanzi l'arco AB per la misura dell' angolo ACB. Bisogna solamente osservare, nel paragonare gli angoli fra loro, che gli archi che servono per misura di essi, debbano essere descritti con eguali raggi; poichè questo è ciò che suppongono tutte le precedenti proposizioni.

*Scolio I.* Sembra più naturale il misurare una quantità con un' altra quantità della medesima specie; e con questo principio converrebbe rapportare tutti gli angoli all' angolo retto: così l' angolo retto essendo l'unità di misura, un angolo acuto sarebbe espresso da un numero compreso tra 0 ed 1, ed un angolo ottuso da un numero fra 1 e 2. Ma questa maniera di esprimere gli angoli non sarebbe la più comoda nella pratica; è stato trovato molto più semplice di misurarli con archi di circolo, per la facilità di fare archi eguali ad archi dati, e per molte altre ragioni. Del rimanente se la misura degli angoli pel mezzo degli archi di circolo è in qualche modo indiretta, non è meno facile di ottenere col loro mezzo la misura diretta ed assoluta; poichè se paragonasi l'arco che serve di misura ad un angolo colla quarta parte della circonferenza, avrete il rapporto dell'angolo dato all' angolo retto che è la misura assoluta.

*Scolio II.* Tutto ciò che è stato dimostrato nelle tre proposizioni precedenti pel paragone degli angoli con gli archi, à luogo egualmente pel paragone dei settori con gli archi; poichè i settori sono eguali quando lo sono gli angoli, ed in generale essi sono proporzionali agli angoli; dunque *due settori ACB, ACD, presi nel medesimo circolo od in circoli eguali, stanno fra loro come gli archi AB, AD, basi di questi stessi settori.*

Si vede da ciò che gli archi di un circolo che servono di misura agli angoli, possono parimente servire di misura ai differenti settori di un medesimo circolo o di circoli eguali (*a*).

(a) *Affinchè una quantità qualunque possa essere misurata, è d' uopo che si riferisca ad un' altra quantità della stessa specie che sia presa per unità di misura; così le lunghezze si misurano con una data lunghezza, le superficie con altra su-*

## PROPOSIZIONE XVIII.

### TEOREMA.

*L'angolo iscritto à per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati*

Sia l' angolo iscritto ( *fig. 64 e 65* ) BAD ; dico che l' angolo BAD à per misura la metà dell' arco BD. Fig. 64 e 65.

Suppongasi primieramente che il centro del circolo sia situato dentro l'angolo BAD ( *fig. 64* ); si condurrà il diametro AE ed i raggi CB, CD. L'angolo BCE, esterno rispetto al triangolo ABC, è eguale alla somma dei due interni ed opposti CAB, ABC ( *Prop. 19, Cor. 6, lib. I* ): ma essendo il triangolo BAC isoscele, l' angolo CAB è eguale all' angolo ABC, dunque l' angolo BCE è doppio di BAC. L'angolo BCE, come angolo al centro, à per misura l'arco BE; dunque l'angolo BAC avrà per misura la metà di BE. Per una simile ragione l'angolo CAD avrà per misura la metà di ED; dunque l'angolo BAC più CAD, ovvero BAD, avrà per misura la metà di BE più ED, ossia la metà di BD. Fig. 64.

---

*perficie, i solidi con altro solido; secondo questo principio, volendo la misura di un angolo ABC*(tav. 7 bis, fig. 10), *bisognerà riferire questo ad un altro angolo; e siccome l'angolo retto è un angolo di un valore determinato e facilmente assegnabile, così si paragonerà coll' angolo retto DEF, preso per unità di misura degli angoli; allora la misura dell'angolo ABC sarà espressa dalla frazione* $\frac{ABC}{DEF}$; *ma siccome gli angoli stanno fra loro come gli archi così* $\frac{ABC}{DEF} = \frac{AC}{DF}$, *onde la stessa frazione* $\frac{AC}{DF}$ *sarà pure la misura dell' angolo ABC; ma se si prenda il quarto della circonferenza DF per misura degli archi,* $\frac{AC}{DF}$ *indicherà la misura dell'arco AC; dunque quegli stessi numeri che esprimono l' arco AC rappresentano l' angolo ABC* ( Il Trad. ).

Fig. 65. Suppongasi in secondo luogo che il centro C (*fig. 65*) sia situato fuori dell'angolo BAD; allora, tirando il diametro AE, l'angolo BAE avrà per misura la metà di BE, l'angolo DAE la metà di DE; dunque la loro differenza BAD avrà per misura la metà di BE meno la metà di DE, ovvero la metà di BD.

Dunque *ogni angolo iscritto* etc. C. B. D.

Fig. 66. *Corollario I.* Tutti gli angoli (*fig. 66*) BAC, BDC etc. iscritti nel medesimo segmento di circolo sono eguali, perchè ànno per misura la metà dello stesso arco BOC.

Fig. 67. *Corollario II.* Ogni angolo BAD (*fig. 67*) iscritto nel semicircolo è un angolo retto, poichè à per misura la metà della mezza circonferenza, ossia la quarta parte della circonferenza.

Per dimostrare la stessa cosa in un' altra maniera, tirisi il raggio AC; il triangolo ABC è isoscele, onde l'angolo BAC è eguale all' angolo ABC; il triangolo CAD è parimente isoscele, e l'angolo CAD è eguale all'angolo CDA; dunque BAC più CAD, o BAD, è eguale ad ABD più ADB; ma se i due angoli B e D del triangolo ABD equivalgono insieme al terzo BAD, i tre angoli del triangolo equivaleranno a due volte l'angolo BAD: ma essi equivalgono a due angoli retti; dunque l'angolo BAD è un angolo retto.

Fig. 66. *Corollario III.* Ogni angolo BAC (*fig. 66*) iscritto in un segmento maggiore del semicircolo è un angolo acuto, poichè à per misura la metà dell' arco BOC minore di una mezza circonferenza.

Ed ogni angolo BOC iscritto in un segmento minore del semicircolo è un angolo ottuso, poichè à per misura la metà dell' arco BAC maggiore di una mezza circonferenza.

Fig. 68 *Corollario IV.* Gli angoli opposti A e C (*fig. 68*) di un quadrilatero iscritto ABCD, equivalgono insieme a due angoli retti; poichè l'angolo BAD à per misura la metà dell' arco BCD, l'angolo BCD à per misura la metà dell' arco BAD; dunque i due angoli BAD, BCD presi insieme ànno per misura la metà della circonferenza; dunque la loro somma equivale a due angoli retti.

## PROPOSIZIONE XIX.

### TEOREMA.

*L' angolo formato da una tangente e da una corda à per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati.*

Sia l' angolo BAC (*fig. 69*) formato dalla corda AC e dalla tangente BE; dico che l' angolo BAC à per misura la metà dell' arco AMDC, compreso fra i suoi lati. Fig.69.

Dal punto di contatto A conducasi il diametro AD; l' angolo BAD è retto (*Prop. 9*); esso à per misura la metà della mezza circonferenza AMD: l' angolo DAC à per misura la metà di DC; dunque BAD più DAC ossia BAC à per misura la metà di AMD più la metà di DC, ovvero la metà dell' arco intero AMDC. Si dimostrerebbe similmente che l' angolo CAE à per misura la metà dell' arco AC compreso fra i suoi lati (*a*). Quindi *l'angolo formato* etc. C. B. D.

(a) *Dimostrato questo teorema, è chiaro che gli angoli formati da una tangente e da una corda sono eguali agli angoli che si formerebbero negli alterni segmenti del circolo.*

*Infatti l' angolo FBA* ( fig. 89 ) *à per misura la metà dell' arco AKB; quale metà misura ancora l' angolo formato nell'alterno segmento del circolo, cioè AMB; quindi questi angoli sono eguali; similmente si dimostrerebbe l' angolo ABE esser eguale a qualunque angolo potrebbe formarsi nell' alterno segmento.*

(Il Trad.)

# PROBLEMI

## RELATIVI AL PRIMO E SECONDO LIBRO.

---

### PROBLEMA I.

*Dividere una linea retta data in due parti eguali.*

Fig. 70. Sia data una linea retta AB ( *fig. 70* ), bisogna dividerla in due parti eguali.

Dai punti A e B, come centri, e con raggi eguali, descrivansi due archi che si taglino in D ; il punto D sarà egualmente lontano dai punti A e B ; segnisi nella stessa maniera al di sopra o al di sotto della linea AB un secondo punto E egualmente lontano dai punti A e B; per i due punti D ed E tirisi la linea DE ; dico che DE taglierà la linea AB in due parti eguali nel punto C.

Poichè i punti D ed E essendo ciascuno egualmente distante dalle estremità A e B , debbono trovarsi ambidue nella perpendicolare innalzata sul mezzo di AB. Ma per due punti dati non può passare se non che una sola linea retta ; dunque la linea DE sarà quella che taglia la linea AB in due parti eguali nel punto C. Quindi *la retta BA è stata divisa per metà in C.* Ciò bisognava fare.

### PROBLEMA II.

*Da un punto dato in una retta, alzare a perpendicolare a questa linea.*

Fig. 71. Sia il punto A ( *fig. 71* ) sopra la retta BC, è d'uopo alzare dal punto A una perpendicolare a questa retta.

Prendansi i punti B, C ad egual distanza da A; indi dai punti B e C, come centri , e con un raggio maggior di BA , descrivansi due archi che si taglino in D ; tirisi AD ; dico esser questa la perpendicolare domandata.

Poichè il punto D essendo egualmente lontano da B e C, esso appartiene alla perpendicolare alzata sopra il mezzo di BC ; dunque AD è questa perpendicolare. Quindi *dal dato punto A si è alzata la perpendicolare AD alla retta BC.* C. B. F.

*Scolio*. La medesima costruzione serve a fare un angolo retto BAD in un punto A dato sopra una retta data CB.

## PROBLEMA III.

***Da un punto dato fuori di una linea retta, abbassare a questa linea la perpendicolare.***

Dal punto dato A ( *fig*. 72 ) fuori della linea retta BD, abbassare a questa linea la perpendicolare. Fig. 72

Dal punto A, come centro, e con un raggio sufficientemente grande descrivasi un arco che tagli la linea data nei punti B e D; segnisi in seguito un punto E egualmente distante dai punti B, D, e tirisi AE; dico AE essere la domandata perpendicolare.

Infatti i due punti A ed E essendo ciascuno egualmente distante dai punti B e D, la linea AE è perpendicolare a BD. Quindi *dal dato punto A si è abbassata la perpendicolare AE alla retta BD*. C. B. F.

## PROBLEMA IV.

***Ad un punto dato in una linea, fare un angolo eguale ad un angolo dato.***

Al punto A ( *fig*. 73 ) della linea AB, fare un angolo eguale all' angolo dato K. Fig. 73.

Dal vertice K, come centro, e con un raggio ad arbitrio descrivasi l' arco IL terminato ai due lati dell' angolo: dal punto A, come centro, e con un raggio AB eguale a KI, descrivasi l' arco indefinito BO; prendasi poi un raggio eguale alla corda LI; dal punto B, come centro, e col medesimo raggio, descrivasi l'arco che tagli in D l' arco indefinito BO; tirisi AD; dico l'angolo DAB essere eguale all' angolo dato K.

Infatti i due archi BD, LI ànno raggi eguali e corde eguali; dunque ( *Prop*. 4, *lib*. *II* ) sono eguali, e perciò l' angolo BAD è eguale all' angolo IKL. Quindi *al dato punto A nella retta AB si è fatto l'angolo BAD eguale all' angolo dato K*. C. B. F.

## PROBLEMA V.

*Dividere un angolo od un arco in due parti eguali.*

Fig. 74. 1.° Sia l' arco AB ( *fig. 74* ), dividerlo in due parti eguali.

Dai punti A e B, come centri, e con uno stesso raggio descrivansi due archi che si taglino in D; pel punto D e pel centro C tirisi CD; dico CD taglierà l'arco AB in due parti eguali nel punto E.

Infatti ciascuno dei punti C e D è egualmente distante dalle estremità A e B della corda AB; dunque la retta CD è perpendicolare sulla metà di questa corda; dessa divide l'arco AB in due parti eguali nel punto E ( *Prop. 6, lib. II* ).

2.° Sia l' angolo ACB, dividerlo per metà.

Col centro C, come centro, descrivasi l' arco AB; dai punti A e B, come centri, e con uno stesso raggio, descrivansi due archi che si taglino in D; pel punto D e pel centro C tirisi CD, che divide in due parti eguali l' arco AB, per essere ciascuno dei punti C, D egualmente distante dalle estremità A e B; poichè è chiaro che essendo l'arco AE eguale all' arco EB, l' angolo ACB debb' essere eguale all'angolo ECB ( *Prop. 15, lib. II* ); e quindi la CD divide l' angolo ACB per metà.

*Si è diviso dunque in due parti eguali l'angolo ACB, e l'arco AB.* C. B. F.

*Scolio.* Si può con la medesima costruzione dividere ciascuna delle metà AE, EB in due parti eguali, in otto, in sedici etc. (*a*).

(a) *Stimiamo non superfluo notare, che se l'angolo dato fosse retto, potrebbe ancora dividersi in tre parti eguali.*

*Infatti se s' intenda costruito un triangolo equilatero sopra un lato dell' angolo retto a partire dal vertice, la porzione dell' angolo retto dato, che forma il terzo angolo del triangolo equilatero, è* $\frac{2}{3}$ *di un angolo retto* ( Corol. 3, Prop. 9, lib. I ); *quindi la rimanente porzione dell' angolo retto ne sarà giusto il terzo; dunque dividendo per metà l' angolo del triangolo equilatero, resterà trisecato l' angolo retto.* ( Il Trad. )

## PROBLEMA VI.

*Per un punto dato, condurre la parallela ad una linea retta data.*

Pel dato punto A ( *fig. 75* ) condurre la parallela alla linea retta BC. Fig. 75.

Dal punto A, come centro, e con un raggio abbastanza grande, descrivasi l'arco indefinito EO; dal punto E, come centro, e col medesimo raggio, descrivasi l'arco AF; prendasi ED eguale ad AF, e tirisi AD; dico esser questa la parallela domandata.

Poichè congiunta la AE, si vede che gli angoli alterni AEF, EAD sono eguali, essendo gli archi AF, ED eguali; dunque la linea AD è parallela alla BC ( *Prop. 24, lib. I*). Quindi *pel punto A si è condotta la parallela AD alla BC.* C. B. F.

## PROBLEMA VII.

*Essendo dati due angoli di un triangolo, trovare il terzo.*

Siano dati due angoli A e B ( *fig. 76* ) di un triangolo, trovare il terzo. Fig. 76.

Tirisi la linea indefinita DEF; facciasi al punto E l'angolo DEC eguale all' angolo A, e l' angolo CEH eguale all'angolo B; dico che il rimanente angolo HEF è l'angolo richiesto.

Poichè questi tre angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti; e siccome ancora i tre angoli di un triangolo sono eguali a due retti ( *Prop. 19, lib. I* ), ed essendo i due DEC, CEH eguali ai due A, B, sarà il rimanente HEF eguale al terzo del triangolo ( *Ass. 7* ). Dunque *essendo dati due angoli di un triangolo, si è trovato il terzo.* C. B. F.

## PROBLEMA VIII.

*Dati due lati di un triangolo e l'angolo da essi compreso, descrivere il triangolo.*

Siano dati i lati B, C ( *fig. 77* ) di un triangolo, e l'angolo A che essi comprendono, descrivere il triangolo. Fig. 77.

Tirisi la linea indefinita DE; facciasi al punto D l'angolo EDF eguale all'angolo A; prendasi quindi DG eguale a B, DH eguale a C, tirisi GH; dico DGH sarà il triangolo cercato, poichè à i due lati GD e DH e l'angolo GDH eguali ai dati. Quindi *dati due lati di un triangolo e l'angolo da essi compreso, si è descritto il triangolo*. C. B. F.

## PBOBLEMA IX.

*Dati due angoli ed un lato di un triangolo, descrivere il triangolo.*

Siano dati due angoli A e B ed un lato AB di un triangolo, bisogna descrivere il triangolo.

I due angoli dati saranno o tutti e due adiacenti al lato dato, od uno adiacente e l'altro opposto. In questo ultimo caso, cercato il terzo (*Prob.* 7), si avranno così i due angoli adiacenti al dato lato.

Fig. 78 Ciò posto, tirisi la retta DE (*fig.* 78) eguale al lato dato, facciasi al punto D l'angolo EDF eguale ad uno degli angoli adiacenti, ed al punto E l'angolo DEG eguale all'altro: le due linee DF, EG si taglieranno in H, e sarà così descritto il triangolo DEH domandato col dato lato e cogli angoli dati. Quindi *dati due angoli ed un lato di un triangolo si è descritto il triangolo*. C. B. F.

## PROBLEMA X.

*Dati i tre lati di un triangolo, descrivere il triangolo.*

Fig. 79. Siano dati i tre lati (*fig.* 79) A, B, C di un triangolo, fa d'uopo descrivere il triangolo.

Tirisi DE eguale al lato A; col punto E, come centro, e con un raggio eguale al secondo lato B, descrivasi un arco; dal punto D, come centro, e con un raggio eguale al terzo lato C, descrivasi un altro arco che taglierà il primo nel punto F; tirate DF, FE; si sarà così descritto il triangolo DEF domandato, avente i tre lati DE, DF, FE, eguali ai tre dati A, B, C. Quindi *dati i tre lati di un triangolo si è descritto il triangolo*. C. B. F.

*Scolio*. Se uno de' lati fosse maggiore della somma degli altri due, gli archi non s'incontrerebbero; ma la soluzione sarà sempre possibile se la somma di due lati, presi come si vorrà, sia maggiore del terzo.

## PROBLEMA XI.

*Essendo dati due lati di un triangolo ed un angolo opposto ad uno dei lati dati, descrivere il triangolo.*

Siano dati (*fig. 80*) i due lati A e B di un triangolo e l' angolo C opposto al lato B, descrivere il triangolo. Fig. 80.

Vi sono due casi : 1.° se l'angolo C è retto od ottuso facciasi l' angolo EDF eguale all' angolo C, prendasi DE eguale ad A ; dal punto E, come centro, e con un raggio eguale al lato dato B, descrivasi un arco che tagli in F la linea DF, e tirisi EF ; dico EDF essere il triangolo richiesto.

Infatti il lato DE è eguale al lato A, il lato EF al lato B, e l' angolo D eguale a C.

Bisogna in questo primo caso che il lato B sia maggiore di A ; poichè essendo l' angolo C retto od ottuso, è il maggiore degli angoli del triangolo ; dunque il lato opposto dev' essere pure il maggiore.

2.° Se l' angolo C è acuto (*fig. 81*), e B sia maggiore di A, à sempre luogo la medesima costruzione, e DEF è il triangolo domandato. Fig. 81.

Ma se, l' angolo C (*fig. 82*) essendo acuto, il lato B fosse minore di A, allora l' arco descritto dal centro E col raggio EF eguale a B taglierà il lato DF in due punti E e G situati dalla medesima parte per rapporto a D ; dunque vi saranno due triangoli DEF, DEG che soddisferanno egualmente al problema. Quindi *dati due lati ed un angolo opposto ad uno dei lati si è descritto il triangolo.* C. B. F. Fig. 82.

*Scolio.* Il problema sarebbe impossibile in tutti i casi, se il lato B fosse minore della perpendicolare abbassata da E sopra la retta DF.

## PROBLEMA XII.

*Essendo dati due lati adiacenti di un parallelogrammo e l'angolo da essi compreso, descrivere il parallelogrammo.*

Siano dati i due lati A, B (*fig. 83*) adiacenti di un parallelogrammo, e l' angolo C da essi compreso, descrivere il parallelogrammo. Fig. 83.

Tirisi la linea DE eguale ad A, facciasi al punto D

l' angolo FDE eguale a C, prendasi DF eguale a B: descrivansi due archi uno dal punto F, come centro, e con un raggio FG eguale a DE, l' altro dal punto E, come centro, e con un raggio EG eguale a DE, al punto G, ove questi due archi si tagliano, tirinsi FG, EG; dico DEGF essere il parallelogrammo domandato.

Poichè per costruzione i lati opposti sono eguali, dunque la figura descritta è un parallelogrammo ( *Prop. 30. lib. I* ), e questo parallelogrammo è formato coi lati dati e l' angolo dato. Dunque *dati due lati adiacenti di un parallelogrammo, e l' angolo da essi compreso, si è descritto tale parallelogrammo*. C. B. F.

*Corollario*. Se l'angolo dato è retto, la figura sarà un rettangolo: se poi i lati sono eguali, sarà un quadrato.

## PROBLEMA XIII.

*Trovare il centro di un cerchio o di un arco dato.*

Dato il cerchio terminato dalla circonferenza ABC, (*fig. 84*) trovare il centro: così pure di un arco. Fig. 84.

Prendansi a piacere nella circonferenza o nell' arco tre punti A, B, C; tirinsi le rette AB, CB; dividere queste due linee in due parti eguali per mezzo delle perpendicolari DE, FG; dico che il punto d' incontro O di queste perpendicolari sarà il centro domandato.

Infatti ( *Scolio Prop. 6, lib. II* ) nella perpendicolare DE dovrà trovarsi il centro del cerchio, dovrà ancora trovarsi nella perpendicolare FG; dunque troverassi nel punto comune O ove s' incontrano. Quindi *dato un cerchio od un arco si è trovato il centro*. C. B. F.

La medesima costruzione serve a far passare una circonferenza per tre punti dati A, B, C; come pure a descrivere una circonferenza nella quale il triangolo ABC sia iscritto.

## PROBLEMA XIV.

*Per un punto dato condurre una tangente ad un cerchio dato.*

Fig. 85. Fig. 86. Sia dato il punto A (*fig. 85*) sopra la circonferenza, ed il punto A fuori il cerchio ( *fig. 86* ); fa d' uopo condurre in ambidue i casi la tangente al cerchio.

1.° Tirisi il raggio CA, e conducasi AD perpendicolare a CA; dico AD essere la tangente domandata.

Infatti (*Prop. 9, lib. II*) la perpendicolare innalzata all' estremità di un raggio è tangente al cerchio; dunque DA è la tangente richiesta.

2.° Uniscasi il punto A ed il centro colla linea retta CA; dividasi CA in due parti eguali nel punto O; dal punto O, come centro, e col raggio OC descrivasi una circonferenza che taglierà la circonferenza data nel punto B; tirisi AB; dico AB essere la tangente domandata.

Poichè tirando CB, l'angolo CBA iscritto nel semicerchio è un angolo retto (*Prop. 18, lib. II*); dunque AB è perpendicolare all' estremità del raggio CB; essa dunque è la tangente domandata.

Quindi *dato un punto o sopra la circonferenza o fuori del cerchio si è condotta la tangente.* C. B. F.

*Scolio.* Essendo il punto A fuori del cerchio, si vede che vi sono sempre due tangenti eguali, AB, AD, che passano nel punto A; esse sono eguali perchè i triangoli CBA, CDA ànno l' ipotenusa CA comune ed il lato CB eguale al lato CD; quindi esse sono eguali (*Prop. 18, lib. I*); dunque AB è eguale ad AD, e nello stesso tempo l'angolo CAD è eguale all' angolo CAB.

## PROBLEMA XV.

*Iscrivere un cerchio in un triangolo dato.*

Dato il triangolo ABC (*fig. 87*), iscrivervi un cerchio. Fig. 87.

Dividansi gli angoli A e B in due parti eguali colle rette AO, BO, che s' incontreranno in O; dal punto O abbassinsi le perpendicolari OD, OE, OF sopra i tre lati del triangolo; dico che queste perpendicolari sono eguali fra loro, ed il cerchio descritto col centro O e con un raggio eguale a ciascuna delle tre perpendicolari essere il cerchio iscritto nel triangolo ABC.

Infatti per costruzione l'angolo DAO è eguale ad OAF, l'angolo retto ODA è eguale ad AFO: dunque il terzo angolo AOD è eguale al terzo AOF; d'altronde il lato AO è comune ai due triangoli AOD, AOF, e gli angoli adiacenti al lato eguale sono eguali; dunque questi due triangoli sono eguali; e perciò DO è eguale ad OF. Si dimostrerà similmente che i due triangoli BOD, BOE sono eguali,

quindi DO è eguale ad OE; dunque le tre perpendicolari OD, OE, OF sono eguali fra loro.

Ora se dal punto O, come centro, e col raggio OD si descriva una circonferenza, è chiaro che questa sarà iscritta nel triangolo ABC, poichè il lato AB perpendicolare all' estremità del raggio OD è una tangente, ed è lo stesso dei lati BC, AC.

Quindi *nel detto triangolo ABC si è iscritto il cerchio DFE.* C. B. F.

*Scolio.* Le tre linee rette che dividono in due parti eguali i tre angoli di un triangolo concorrono in un medesimo punto.

## PROBLEMA XVI.

*Sopra una linea retta data descrivere un segmento capace di un angolo dato; cioè un segmento tale, che tutti gli angoli in esso iscritti siano eguali ad un angolo dato.*

Fig. 88 e 89. Sia data la linea retta AB (*fig. 88 e 89*), descrivervi sopra un segmento tale, che tutti gli angoli in esso iscritti siano eguali ad un angolo dato C.

Prolunghisi AB verso D; facciasi al punto B l'angolo DBE eguale a C; tirisi BO perpendicolare ad EB, e GO perpendicolare al punto medio di AB; dal punto d' incontro O, come centro, e col raggio OB descrivasi il cerchio AMBK; AMB dico essere il segmento richiesto.

Poichè siccome BF è perpendicolare all' estremità del raggio OB, sarà BF una tangente, e l' angolo ABF avrà per misura la metà dell'arco AKB (*Prop. 19, lib. II*). L' angolo AMB, come angolo iscritto, à per misura la metà dell'arco AKB; dunque l'angolo AMB è eguale all'angolo ABF, eguale all' angolo EBD, eguale al dato C. Quindi tutti gli angoli iscritti nel segmento AMB sono eguali all' angolo dato C, essendosi già dimostrato che tutti gli angoli iscritti nel medesimo segmento di cerchio essere eguali fra loro. Quindi *sopra una data linea retta si è descritto un segmento tale, che tutti gli angoli in esso iscritti sono eguali ad un angolo dato.* C. B. F.

*Scolio.* Se l' angolo dato fosse retto, il segmento domandato sarebbe il semicerchio descritto sopra AB come diametro.

## PROBLEMA XVII.

*Trovare il rapporto numerico di due linee rette, qualora queste due linee ànno tra loro una misura comune.*

Siano date le due linee rette AB e CD(*fig.90*) che ànno una misura comune, bisogna trovarne il rapporto numerico. Fig. 90.

Adattisi la minore CD sopra la maggiore AB tante volte, quante può esservi contenuta; per esempio, due volte col residuo EB.

Adattisi il residuo BE sopra la CD tante volte, quanto può esservi contenuto; una volta, p. e., col residuo DF.

Si adatti il secondo residuo DF sopra il primo BE tante volte, quante può esservi contenuto; una volta, p. e., col residuo GB.

Si adatti il terzo residuo GB sopra il secondo DF tante volte, quante può esservi contenuto.

Continuisi così finchè si abbia un residuo che sia contenuto un numero esatto di volte nel suo precedente.

Allora quest' ultimo residuo sarà la comune misura delle linee proposte, e riguardandolo come l' unità, si troveranno facilmente i valori dei residui precedenti, e finalmente quelli delle due linee proposte, donde si conchiuderà il loro rapporto in numeri.

Per esempio, se si trova che GB è contenuto due volte esattamente in FD, BG sarà la comune misura delle due linee proposte. Sia BG eguale ad 1, si avrà FD eguale a 2; ma EB contiene una volta FD più CB; dunque EB è eguale a 3: CD contiene una volta EB più FD; dunque CD è eguale a 5: finalmente AB contiene due volte CD più EB; dunque AB è eguale a 13; quindi il rapporto delle due linee AB, CD è quello di 13 a 5. Se la linea CD fosse presa per unità, la linea AB sarebbe $\frac{13}{5}$, e se la linea AB fosse presa per unità, la linea CD sarebbe $\frac{5}{13}$.

Quindi *date due linee se n'è trovato il rapporto numerico*. C. B. F.

*Scolio*. Il metodo esposto è quel medesimo che prescrive l' aritmetica per trovare il comun divisore di due numeri; quindi non à bisogno d' altra dimostrazione.

Può accadere, che per quanto avanti si continui la operazione, non si trovi mai un residuo che sia contenuto un numero esatto di volte nel precedente. Allora le due linee non ànno alcuna misura comune, e sono quelle che si chiamano *incommensurabili*; se ne vedrà in seguito un esempio nel rapporto della diagonale al lato del quadrato. Non si può dunque allora trovare il rapporto esatto in numeri; ma trascurando l'ultimo residuo, si troverà un rapporto più o meno approssimativo secondo che più o meno sarà spinta avanti l'operazione.

## PROBLEMA XVIII.

***Dati due angoli trovare la loro comune misura se l' abbiano, e quindi il loro rapporto in numeri.***

Fig. 91. Siano dati i due angoli A, B (*fig. 91*), trovarne la comune misura, se l' ànno, e quindi il rapporto di essi in numeri.

Descrivansi con raggi eguali gli archi CD, EF che servono di misura a questi angoli; procedasi in seguito, per la comparazione degli archi CD, EF come nel problema precedente; poichè un arco può adattarsi sopra un arco dello stesso raggio, come una linea retta sopra una linea retta. Si perverrà così alla comune misura degli archi CD, EF, se l' ànno, ed al loro rapporto in numeri. Questo rapporto sarà lo stesso di quello degli angoli dati (*Prop. 17*, *lib. II*); e se DO è la misura comune degli archi, DAO sarà quella degli angoli. Quindi *dati due angoli si è trovato* etc. C. B. F.

*Scolio*. Si può così trovare il valore assoluto di un angolo paragonando l'arco che gli serve di misura a tutta la circonferenza: per esempio, se l' arco CD è alla circonferenza come 3 a 25, l' angolo A sarà $\frac{3}{25}$ di quattro angoli retti, ovvero $\frac{12}{25}$ di un angolo retto.

Potrà pure accadere che gli archi paragonati non abbiano alcuna misura comune: allora non si avranno per gli angoli se non che rapporti in numeri più o meno approssimativi, secondo che l' operazione sarà stata spinta più o meno avanti.

# LIBRO TERZO

## LE PROPORZIONI DELLE FIGURE

### DEFINIZIONI

I. Si diranno *figure equivalenti* quelle le cui superficie sono eguali.

Due figure possono essere equivalenti quantunque siano molto dissimili: per esempio, un circolo può essere equivalente ad un quadrato, un triangolo ad un rettangolo etc. come si vedrà.

La denominazione di figure eguali sarà conservata a quelle che essendo applicate l' una sopra l'altra coincidono in tutti i loro punti: tali sono due circoli i cui raggi siano eguali; due triangoli che ànno i tre lati respettivamente eguali, etc.

II. Due figure sono *simili* quando ànno gli angoli respettivamente eguali ed i lati *omologhi* proporzionali. Per lati omologhi s' intendono quelli che ànno la medesima posizione nelle due figure, o che sono adiacenti ad angoli eguali. Questi medesimi angoli diconsi *angoli omologhi*.

Due figure eguali sono sempre simili; ma due figure simili possono essere molto diseguali.

III. In due circoli differenti si dicono *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili*, quelli che corrispondono ad angoli al centro eguali.

Così essendo l'angolo A (*fig. 92*) eguale all' angolo O, l' arco BC è simile all' arco DE, il settore ABC al settore ODE, etc. Fig. 92.

IV. L' *altezza* di un parallelogrammo è la perpendicolare EF (*fig. 93*) che misura la distanza di due lati opposti AB, CD, presi per basi. Fig. 93.

V. L' *altezza* di un triangolo è la perpendicolare AD (*fig. 94*) abbassata dal vertice di un angolo A sopra il lato opposto BC, preso per base. Fig. 94.

VI. L' *altezza* del trapezio è la perpendicolare EF
Fig. 95. (*fig.* 95) tirata fra i suoi due lati paralleli AB, CD.

VII. L' *area* o la *superficie* di una figura sono termini quasi sinonimi. L' area indica più particolarmente la quantità superficiale della figura in quanto che essa è misurata o paragonata ad altre superficie.

*N. B.* Per l' intelligenza di questo libro e dei seguenti, bisogna aver presente la teorica delle proporzioni, per la quale rimandiamo ai trattati ordinarî di aritmetica e di algebra. Faremo solamente una osservazione che è importantissima per istabilire il vero senso delle proposizioni, e dissipare ogni oscurità sì nello enunciato che nelle dimostrazioni.

Se si abbia la proporzione A : B :: C : D, si sa che il prodotto degli estremi $A \times D$ è eguale a $B \times C$ prodotto dei medî.

Questa verità è incontrastabile quanto ai numeri; essa lo è pure per le grandezze di qualunque sorta, purchè si esprimano o s' immaginino espresse in numeri; ciò che si può sempre supporre: per esempio, se A, B, C, D sono linee, si può immaginare che una di queste quattro linee, ovvero una quinta, se si voglia, serva a tutte di comune misura, e sia presa per unità; allora A, B, C, D rappresentano ciascuna un certo numero di unità intero o fratto, commensurabile od incommensurabile, e la proporzione tra le linee A, B, C, D diventa una proporzione di numeri.

Il prodotto delle linee A e D che si chiama ancora il loro rettangolo, non è dunque altro che il numero delle unità lineari contenute in A, moltiplicato per lo numero delle unità lineari contenute in D; e si concepisce facilmente che questo prodotto può e dev' essere eguale a quello che resulta similmente dalle linee B e C.

Le grandezze A e B possono essere di una specie, per esempio, linee, e le grandezze C e D di un' altra specie, per esempio, superficie; allora bisogna riguardare sempre queste grandezze come numeri; A e B si esprimeranno in unità lineari, C e D in unità superficiali, ed il prodotto $A \times D$ sarà un numero come il prodotto $B \times C$.

Generalmente in tutte le operazioni che si faranno sopra le proporzioni, bisogna sempre riguardare i termini di queste proporzioni come altrettanti numeri, ciascuno della specie che gli conviene, e non sarà difficile a concepire queste operazioni o le conseguenze che ne derivano.

Dobbiamo però avvertire che parecchie nostre dimostrazioni sono fondate sopra alcune regole semplicissime dell' algebra, le quali sussistono esse stesse sopra gli assiomi cogniti: così se si à $A = B + C$, e si moltiplichi ogni membro per una stessa quantità M, se ne conchiude $A \times M = B \times M + C \times M$;

parimente se si à A = B + C, e D = E — C, e si aggiungano le quantità eguali, cancellando + C e — C che si distruggono, se ne conchiuderà A + D = B + E, e così degli altri casi. Tutto ciò è assai evidente per sè stesso, ma in caso di difficoltà sarà bene di consultare i libri di algebra, e frammischiare così lo studio delle due scienze.

## PROPOSIZIONE PRIMA.

### TEOREMA.

*I parallelogrammi che ànno basi eguali ed altezze eguali sono equivalenti.*

Siano i due parallelogrammi ABCD, ABEF ( *fig. 96* ) che ànno le basi eguali e la stessa altezza; dico che questi parallelogrammi saranno equivalenti. Fig. 96.

Infatti essendosi supposto avere la stessa altezza, le basi superiori DC, FE saranno situate sopra una medesima linea retta parallela ad AB. Ora, per la natura dei parallelogrammi, si à AD eguale a BC, ed AF eguale a BE; pèr la medesima ragione si à DC eguale ad AB, ed EF ad AB; dunque DC è eguale ad EF; onde, togliendo DC ed FE dalla medesima linea DE, i residui CE, DF saranno eguali. Da ciò segue che i triangoli DAF, CBE sono equilateri fra loro, e per conseguenza eguali ( *Prop. 11*, *lib. I* ). Ma se dal quadrilatero ABED si toglie il triangolo ADF, resta il parallelogrammo ABEF; e se dal medesimo quadrilatero ABED si toglie il triangolo CBE, resta il parallelogrammo ABCD; e siccome dallo stesso quadrilatero le parti triangolari tolte sono eguali, le parti rimanenti rappresentate dai due parallelogrammi ABCD, ABEF che ànno la medesima base ed eguale altezza sono equivalenti ( *Ass. 7* ).

Quindi *i parallelogrammi* etc. C. B. D.

*Corollario*. Dunque ogni parallelogrammo ABCD(*fig. 97*) è equivalente al rettangolo ABEF che à la medesima base e la stessa altezza. Fig. 97.

## PROPOSIZIONE II.

**TEOREMA.**

*Se un triangolo ed un parallelogrammo ànno la medesima base e la stessa altezza, il triangolo è metà del parallelogrammo.*

Fig. 98. Il parallelogrammo ABCD (*fig. 98*) ed il triangolo ABC abbiano la medesima base e la stessa altezza; dico il triangolo essere metà del parallelogrammo.

Infatti nel parallelogrammo ABCD la diagonale AC divide il parallelogrammo in due triangoli eguali ABC, ACD (*Prop. 28, lib. 1*); quindi tutto il parallelogrammo è doppio del triangolo ABC. Dunque *se un parallelogrammo* etc. C. B. D.

*Corollario I.* Dunque un triangolo ABC è la metà del rettangolo BCEF che à la medesima base BC e la stessa altezza AO; perchè il rettangolo BCEF è equivalente al parallelogrammo ABCD.

*Corollario II.* Tutti i triangoli che ànno basi eguali ed altezze eguali sono equivalenti.

## PROPOSIZIONE III.

**TEOREMA.**

*Due rettangoli che ànno la medesima altezza, stanno fra loro come le basi.*

Fig. 99. Siano ABCD, AEFD (*fig. 99*) due rettangoli che ànno la medesima altezza AD; dico che stanno fra loro come le basi AB, AE.

Suppongasi primieramente che le basi AB, AE siano commensurabili tra loro, e che stiano, per esempio, come i numeri 7 e 4; se dividasi AB in 7 parti eguali, AE conterrà 4 di queste parti; innalzisi da ogni punto di divisione una perpendicolare alla base, si formeranno così 7 rettangoli parziali che saranno fra loro eguali, perchè avranno eguali basi e la stessa altezza. Il rettangolo ABCD conterrà 7 [illegible]goli parziali, mentre AEFD ne conterrà 4; dunque [illegible]ttangolo ABCD sta al rettangolo AEFD come 7 a 4 [illegible]vero come AB sta ad AE. Il medesimo ra-

gionamento può essere applicato ad ogni altro rapporto diverso da quello di 7 a 4; dunque qualunque sia questo rapporto, purchè commensurabile, si avrà

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Suppongasi in secondo luogo che le basi (*fig. 100*) Fig. 100. AB, AE siano incommensurabili fra loro; dico che ciò non ostante si avrà

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Poichè se questa proporzione non è vera, restando gli stessi i tre primi termini, il quarto sarà maggiore o minore di AE. Suppongasi che sia maggiore, e che si abbia

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Dividasi la linea AB in parti eguali, minori di EO, vi sarà un punto di divisione I situato tra E ed O; da questo punto alzate sopra AI la perpendicolare IK, le basi, AB, AI saranno commensurabili fra loro; e così si avrà, secondo ciò che si è dimostrato,

ABCD : AIKD :: AB : AI.

Ma si à per ipotesi

ABCD : AEFD :: AB : AO.

In queste due proposizioni gli antecedenti sono eguali; dunque i conseguenti sono proporzionali, e ne resulta

AIKD : AEFD :: AI : AO.

Ora AO è maggiore di AI; dunque affinchè sussistesse la proporzione, bisognerebbe che il rettangolo AEFD fosse maggiore di AIKD: ora al contrario esso è minore; dunque la proporzione è impossibile; dunque ABCD non può stare ad AEFD come AB sta ad una linea maggiore di AE.

Con un ragionamento affatto simile si proverebbe che il quarto termine della proposizione non può essere minore di AE; dunque esso è esattamente eguale ad AE.

Dunque, qualunque sia il rapporto delle basi, due rettangoli che ànno la medesima altezza ABCD, AEFD stanno fra loro come le basi AB, AE.

Quindi *due rettangoli* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

*Due rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze.*

Fig. 101. Siano i due rettangoli ABCD, AEGF (*fig. 101*); dico che questi stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze, in modo che si à

ABCD : AEGF :: AB×AD : AE×AF.

Dispongansi i due rettangoli in maniera che gli angoli in A sieno opposti al vertice; prolunghinsi i lati GE, CD fino all' incontro H; i due rettangoli ABCD, AEHD ànno la stessa altezza AD; essi stanno dunque fra loro come le basi AB, AE; similmente i due rettangoli [illegible]D, AEGF ànno la stessa altezza AE; essi stanno [illegible] fra loro come le basi AD, AF, e si avranno per[illegible] due proporzioni

ABCD : AEHD :: AB : AE,
AEHD : AEGF :: AD : AF.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed osservando che il termine AEHD può essere omesso, come moltiplicatore comune all'antecedente ed al conseguente, si avrà

ABCD : AEGF :: AB×AD : AE×AF.

Quindi *due rettangoli* etc. C. B. D.

*Scolio.* Dunque si può prendere per misura di un rettangolo il prodotto della base per l' altezza, purchè s' intenda per questo prodotto quello di due numeri che sono il numero delle unità lineari contenute nella base ed il numero delle unità lineari contenute nell' altezza.

Questa misura d' altronde non è assoluta, ma soltanto relativa; dessa suppone che si valuti similmente un altro rettangolo misurando i suoi lati colla stessa unità lineare, si ottiene così un secondo prodotto, ed il rapporto dei due prodotti è eguale a quello dei rettangoli, conformemente alla proposizione or dimostrata.

Per esempio, se la base del rettangolo A è di tre unità, e la sua altezza di dieci, il rettangolo sarà rap-

presentato dal numero 3 moltiplicato per 10, ossia 30, numero che da sè solo non significa niente; ma se si à un secondo rettangolo B, la cui base sia di dodici unità, e l'altezza di sette, questo secondo rettangolo sarà rappresentato dal numero 7 moltiplicato per 12, cioè 84; dal che si conchiuderà che i due rettangoli A e B stanno fra loro come 30 sta ad 84; dunque se si convenisse di prendere il rettangolo A per unità di misura nelle superficie, il rettangolo B avrebbe allora per misura assoluta $\frac{84}{30}$, cioè sarebbe eguale ad $\frac{84}{30}$ di unità superficiali.

Egli è più comune e più semplice di prendere il quadrato per l'unità di superficie, e si sceglie il quadrato, il cui lato sia l'unità di lunghezza; allora la misura che abbiamo riguardata semplicemente come relativa, diventa assoluta; così, per esempio, il numero 30, col quale abbiamo misurato il rettangolo A, rappresenta 30 unità superficiali, ovvero 30 di quei quadrati, il cui lato è eguale all'unità. La figura 102 rende ciò sensibile. Fig. 102.

Si confonde assai spesso in geometria il prodotto di due linee col *rettangolo* di esse, e questa espressione è anche passata nell'aritmetica per denotare il prodotto di due numeri diseguali, come s'impiega quella del *quadrato* per esprimere il prodotto di un numero moltiplicato per sè medesimo.

I quadrati dei numeri 1, 2, 3, etc. sono 1, 4, 9, etc. Così si vede che il quadrato fatto sopra una linea doppia è quadruplo (*fig 103*); sopra una linea tripla è Fig. 103. nove volte più grande, e così di seguito.

## PROPOSIZIONE V.

X

### TEOREMA.

*L'area di un parallelogrammo qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Sia il parallelogrammo ABCD (*fig. 97*); dico che la Fig. 97. sua area è eguale al prodotto della base AB per la sua altezza BE.

Poichè il parallelogrammo ABCD è equivalente al ret-

tangolo ABEF che à la medesima base AB e la medesima altezza BE ( *Prop. 1* ); ora quest' ultimo à per misura AB moltiplicata per BE ( *Prop. 4* ); dunque AB moltiplicata per BE è eguale all' area del parallelogrammo ABCD. Dunque *l' area di un parallelogrammo* etc. C. B. D.

*Corollario*. I parallelogrammi che ànno la medesima base stanno fra loro come le altezze; ed i parallelogrammi che ànno la medesima altezza stanno fra loro come le basi; poichè A, B, C essendo tre grandezze qualunque, si à generalmente A×C : B×C :: A : B.

## PROPOSIZIONE VI.

### TEOREMA.

*L' area di un triangolo è eguale al prodotto della sua base per la metà dell' altezza.*

Fig. 104. Sia il triangolo ABC ( *fig. 104* ); dico che l' area di esso triangolo è eguale al prodotto della sua base BC per la metà dell' altezza AD.

Poichè il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo ABCE che à la medesima base BC e la stessa altezza AD ( *Prop. 2* ); ora la superficie del parallelogrammo è eguale a BC moltiplicata per AD ( *Prop. 5* ); dunque quella del triangolo è eguale alla metà di BC moltiplicata per AD, ovvero a BC moltiplicata per la metà di AD. Quindi *l' area di un triangolo* etc. C. B. D.

*Corollario*. Due triangoli che ànno la medesima altezza stanno fra loro come le basi, e due triangoli che ànno la medesima base stanno fra loro come le altezze.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

*L' area di un trapezio è eguale alla sua altezza moltiplicata per la semisomma delle basi parallele.*

Fig. 105. Sia il trapezio ABCD ( *fig. 105* ); dico che la sua area è eguale all' altezza EF moltiplicata per la semisomma delle basi parallele AB, CD.

Pel punto medio I del lato CB tirisi la KL parallela al lato opposto AD, e prolunghisi DC finchè incontri KL.

Nei triangoli IBL, ICK si à il lato IB eguale al lato IC, per costruzione, l'angolo LIB eguale all'angolo CIK, e l'angolo IBL eguale all'angolo ICK, poichè CK, BL sono parallele ( *Prop. 24, lib. 1* ); quindi questi triangoli sono eguali ( *Prop. 7, lib. I* ); dunque il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo ADKL che à per misura AL moltiplicata per EF. Ma si à AL eguale a DK; e poichè il triangolo IBL è eguale al triangolo KCI, così il lato BL è eguale al lato CK; dunque AB più CD è eguale ad AL più DK ovvero a due volte AL, e perciò AL è la semisomma delle basi AB, CD; dunque l'area del trapezio ABCD è eguale all'altezza EF moltiplicata per la semisomma delle basi AB, CD; il che si esprime così: $ABCD = EF \times \left\{ \frac{AB+CD}{2} \right\}$

Quindi *l' area di un trapezio* etc. C. B. D.

— *Scolio*. Se pel punto I, medio di BC, si meni IH parallela alla base AB, sarà pure il punto H medio di AD; infatti la figura AHIL è un parallelogrammo, al pari di DHIK, poichè i lati opposti son paralleli; si à dunque AH eguale ad IL, e DH eguale ad IK: ora IL è eguale ad IK, perchè i triangoli BIL, CIK sono eguali; dunque AH è eguale a DH.

Si può osservare che la linea HI è eguale ad AL ovvero alla metà della somma di AB e CD: dunque l'area del trapezio può esprimersi così EF $\times$ HI; essa dunque è eguale all' altezza del trapezio moltiplicata per la linea che unisce i punti medî dei lati non paralleli.

## PROPOSIZIONE VIII.

### TEOREMA.

*Se una linea retta è divisa in due parti, il quadrato di tutta la linea conterrà i quadrati delle parti, più il rettangolo contenuto due volte dalle stesse parti.*

Sia la linea AC divisa in due parti AB, BC ( *fig. 106* ); dico che il quadrato di tutta la linea AC conterrà i quadrati di AB e di BC più il rettangolo che si contiene due volte dalle AB e BC; il che si esprime così: Fig. 106.

$$\overline{AC}^2 \text{ o } (AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\, AB \times BC.$$

Costruiscasi il quadrato ACDE, prendasi AF eguale ad AB, tirisi FG parallela ad AC, e BH parallela ad AE.



AB è eguale ai quadrati di BC, AC, meno due volte il rettangolo contenuto dalle BC, CD.

Dunque *in ogni triangolo* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XIII.

### TEOREMA.

*In ogni triangolo ottusangolo, il quadrato del lato che si oppone all' angolo ottuso è tanto maggiore dei quadrati dei lati che comprendono l' angolo ottuso, quanto è il rettangolo contenuto due volte da uno dei lati che sono intorno all' angolo ottuso, cioè da quello sul quale prolungato cade la perpendicolare dall' angolo opposto, e dalla linea retta presa tra questa perpendicolare e l' angolo ottuso.*

Sia il triangolo ABC ( *fig. 111*) che abbia l'angolo ottuso C, e dal punto A tirisi sopra la BC prolungata la perpendicolare AD; dico che il quadrato di AB sarà maggiore dei quadrati di AC, CB, per quanto è il rettangolo contenuto due volte dalle BC, CD; il che si esprime: Fig. 111.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,[\,BC \times CD\,].$$

La perpendicolare non può cader dentro del triangolo, poichè se cadesse, per esempio, in E, il triangolo ACE avrebbe ad un tempo stesso l'angolo retto E e l'angolo ottuso C, il che è impossibile ( *Prop. 19, lib. I*); essa dunque cade al di fuori, e si à BD eguale a BC più CD: e per conseguenza ( *Prop. 8*) il quadrato di BD è eguale ai quadrati di BC, CD più due volte il rettangolo di BC, CD. Aggiungendo ad ambe le parti il quadrato di AD, si avranno i quadrati di BD, AD eguali ai quadrati di BC, CD, AD, più due volte il rettangolo contenuto dalle BC, CD: ma per essere retto l' angolo D ( *Prop. 11*), i quadrati di BD, AD sono eguali al quadrato di AB, ed i quadrati di CD, AD sono eguali al quadrato di AC per simile ragione; dunque il quadrato di AB è eguale ai quadrati di AC, BC, più due volte il rettangolo contenuto dalle BC, CD.

Quindi *in ogni triangolo* etc. C. B. D.

*Scolio.* Il triangolo rettangolo è il solo nel quale la somma dei quadrati di due lati sia eguale al quadrato del terzo: poichè se l'angolo compreso da questi lati è acuto,

la somma dei loro quadrati sarà maggiore del quadrato del lato opposto: se è ottuso sarà minore.

## PROPOSIZIONE XIV.

### TEOREMA.

***In un triangolo qualunque se si tiri dal vertice al punto medio della base una linea retta, sarà la somma dei quadrati degli altri due lati, eguale alla somma di due volte il quadrato della retta congiunta, più due volte il quadrato della metà della base.***

Fig. 112. Sia il triangolo ABC (*fig. 112*), ed in esso si tiri dal vertice A al punto medio E della base BC la linea AE; dico che sarà la somma dei quadrati di AB, AC eguale alla somma di due volte il quadrato di AE più due volte il quadrato di BE; ciò che si esprime così:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

Abbassisi la perpendicolare AB sulla base BC: il triangolo AEC rispetto all' angolo acuto E (*Prop. 12*) darà il quadrato di AC eguale alla somma dei quadrati di AE e di EC meno due volte il rettangolo contenuto dalle EC, ED: ed il triangolo ABE, rispetto all' angolo ottuso E (*Prop. 13*), darà il quadrato di AB eguale alla somma dei quadrati di AE, EB, più due volte il rettangolo contenuto dalle EB, ED. Dunque, addizionando, si avrà la somma dei quadrati di AB, AC eguale alla somma dei quadrati di AE, EC meno due volte il rettangolo contenuto dalle EC, ED più la somma dei quadrati di AE, EB più due volte il rettangolo contenuto dalle EB, ED; ed osservando che EB è eguale ad EC, si avrà la somma dei quadrati di AB, AC eguale alla somma di due volte il quadrato di AE più due volte il quadrato di EB.

Quindi *in un triangolo qualunque se si tiri etc.* C.B.D.

*Corollario.* Dunque *in ogni parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali.*

Fig. 113. Poichè le diagonali (*fig. 113*) AC, BD si tagliano scambievolmente in due parti eguali nel punto E (*Prop. 31, lib. I*); così il triangolo ABC dà la somma dei quadrati di AB, BC eguale a due volte il quadrato di AE più due volte il quadrato di BE; similmente il triangolo ADC dà

la somma dei quadrati di AD, DC eguale a due volte il quadrato di AE più due volte il quadrato di DE: addizionando membro con membro, ed osservando che BE è eguale ad ED, si avrà la somma dei quadrati di AB, AD, DC, BC eguale a quattro volte il quadrato di AE, più quattro volte il quadrato di DE. Ma quattro volte il quadrato di AE è il quadrato del doppio di AD (*Scolio Prop. 4*), o sia AC, e quattro volte il quadrato di DE è il quadrato di BD; dunque la somma dei quadrati dei lati di un parallelogrammo è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

## PROPOSIZIONE XV.

### TEOREMA.

*Se in un triangolo si tiri una linea retta parallela ad un lato, essa dividerà i rimanenti lati del triangolo proporzionalmente.*

Se nel triangolo ABC (*fig. 114*) si tiri la linea parallela al lato BC; dico che si à

Fig. 114.

AD : DB :: AE : EC.

Congiungansi le BE, DC; i due triangoli BDE, DEC ànno la stessa base DE, ànno pure la medesima altezza, poichè i vertici B e C sono situati sopra una parallela alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti (*Corol. 2*, *Prop. 2*).

I triangoli ADE, BDE che ànno comune il vertice E, ànno la medesima altezza, e stanno perciò fra loro come le basi AD, BD (*Corol. Prop. 6*); onde si à

ADE : BDE :: AD : DB.

I triangoli ADE, DEC, che ànno comune il vertice D, ànno pure la medesima altezza, e stanno fra loro come le basi AE, EC; dunque si à

ADE : DEC :: AE : EC.

Ma il triangolo BDE è eguale al triangolo DEC; dunque pel rapporto comune in queste due proporzioni, se ne conchiuderà:

AD : DB :: AE : EC.

Quindi *se in un triangolo* etc. C. B. D.

*Corollario I.* Di qui resulta *componendo*

AD + DB : AD :: AE + EC : AE,

oppure

AB : AD :: AC : AE;

e così ancora

AB : BD :: AC : CE.

*Corollario II. Se tra due rette AB, CD* ( fig. 115 ) *si conducano quante parallele si vogliano AC, EF, GH, BD, etc. queste rette saranno tagliate proporzionalmente, e si avrà AE : CF :: EG : FH :: GB : HD etc.*

Sia O il punto d'incontro delle rette AB, CD : nel triangolo EOF, ove la linea AC è parallela alla base EF, si avrà

OE : AE :: OF : CF,

ovvero

OE : OF :: AE : CF.

Nel triangolo OGH si avrà similmente

OE : EG :: OF : FH;

ovvero

OE : OF :: EG : FH;

dunque a cagione del rapporto comune OE : OF, queste due proporzioni danno

AE : CF :: EG : FH.

Si dimostrerà similmente

EG : FH :: GB : HD,

e così in seguito; dunque le rette AB, CD sono tagliate proporzionalmente dalle parallele EF, GH, etc.

## PROPOSIZIONE XVI.

### TEOREMA.

*Reciprocamente, se due lati di un triangolo sono divisi proporzionalmente da una retta, questa sarà parallela al terzo lato.*

Siano i lati AB, AC (*fig. 116*) del triangolo ABC Fig. 116. divisi proporzionalmente: cioè che si abbia

AD : DB :: AE : EC;

dico DE essere parallela al terzo lato BC.

Poichè, se DE non è parallela a BC, suppongasi che sia DO: allora, secondo il teorema precedente, si avrà

AD : DB :: AO : OC.

Ma, per ipotesi, si à

AD : DB :: AE : EC;

dunque si avrebbe

AO : OC :: AE : EC;

proporzione impossibile, poichè da una parte l' antecedente AE è maggiore di AO, e dall'altra il conseguente EC è minore di OC; dunque la parallela a BC menata dal punto D non può differire da DE; dunque DE è questa parallela. Quindi *reciprocamente se due lati* etc. C.B.D.

*Scolio.* La medesima conchiusione avrebbe luogo, se si supponesse la proporzione

AB : AD :: AC : AE;

poichè questa proporzione darebbe

AB — AD : AD :: AC — AE : AE;

ovvero BD : AD :: CE : AE.

## PROPOSIZIONE XVII.

**TEOREMA.**

*La linea retta che divide in due parti eguali un angolo di un triangolo, dividerà la base in due segmenti proporzionali ai lati adiacenti.*

Fig. 117. Sia la linea retta AD ( *fig. 117* ) che divide in due parti eguali l' angolo BAC del triangolo ABC ; dico che dividerà la base BC in due segmenti BD, DC proporzionali ai lati adiacenti AB , AC ; di maniera che si avrà

BD : DC :: AB : AC.

Pel punto C conducasi CE parallela ad AD fino all' incontro di BA prolungato. Nel triangolo BCE la linea AD è parallela alla base CE , onde si à la proporzione ( *Prop. 15* )

BD : DC :: AB : AE.

Ma il triangolo ACE è isoscele , poichè, per le parallele AD , CE , l' angolo ACE è eguale all' angolo DAC ( *Prop. 24, lib. I* ), e l' angolo AEC è eguale all' angolo BAD ; ora , per ipotesi , DAC è eguale a BAD ; dunque AEC è eguale ad ACE, e per conseguenza AE eguale ad AC ( *Prop. 13, lib. I* ) ; sostituendo dunque AC invece di AE nella proporzione precedente , si avrà

BD : DC :: AB : AC.

Quindi *la linea retta che divide* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XVIII.

**TEOREMA.**

*Due triangoli equiangoli ànno i lati omologhi proporzionali e sono simili.*

Fig. 119. Siano ABC, CDE ( *fig. 119* ) due triangoli che ànno gli angoli respettivamente eguali , cioè BAC eguale a CDE, ABC a DCE, ed ACB a DEC ; dico che i lati omologhi od adiacenti agli angoli eguali saranno proporzionali , di maniera che si avrà

BC : CE :: AB : CD :: AC : DE.

Disponghansi i lati omologhi BC, CE nella medesima

direzione, e prolunghinsi i lati BA, ED, finchè s' incontrino in F.

Poichè BCE è una linea retta, e che l'angolo BCA è eguale a CED, ne segue che AC è parallela a DE (*Prop. 24, lib. 1*). Similmente, poichè l'angolo ABC e eguale a DCE, la linea AB è parallela a DC; dunque la figura ACDF è un parallelogrammo.

Nel triangolo BFE la linea AC è parallela alla base FE, onde si à (*Prop. 15*)

BC : CE :: BA : AF.

Invece di AF mettendo la sua eguale CD, si avrà

BC : CE :: BA : CD.

Nel triangolo medesimo BFE, se si riguardi BF come la base, CD è una parallela a questa base, e si à la proporzione

BC : CE :: FD : DE.

Invece di FD mettendo la sua eguale AC, si avrà

BC : CE :: AC : DE.

Finalmente da queste due proporzioni che contengono il medesimo rapporto BC : CE, si può conchiudere ancora

AC : DE :: BA : CD.

Dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE ànno i lati omologhi proporzionali: ma secondo la definizione II, due figure sono simili quando ànno ad un tempo stesso gli angoli respettivamente eguali ed i lati omologhi proporzionali; dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE sono due figure simili.

Quindi *due triangoli equiangoli* etc. C. B. D.

*Corollario*. Affinchè due triangoli siano simili, basta che abbiano due angoli respettivamente eguali, perchè allora il terzo sarà eguale in ambidue i triangoli, e saranno equiangoli.

*Scolio*. Si osserva, che nei triangoli simili i lati omologhi sono opposti ad angoli eguali; così essendo l'angolo ACB eguale a DEC, il lato AB è omologo a DC; similmente AC e DE sono omologhi perchè sono opposti agli angoli eguali ABC, DCE; essendo riconosciuti i lati omologhi, si formano facilmente le proporzioni

**AB : DC :: AC : DE :: BC : CE.**

## PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

*Due triangoli che ànno i lati omologhi proporzionali, sono equiangoli e simili.*

Fig. 120. Siano i triangoli ABC, DEF (*fig. 120*), e si abbia
BC : EF :: AB : DE :: AC : DF;
dico che l' angolo A è eguale all' angolo D, l' angolo B ad E, e C ad F.

Facciasi al punto E l' angolo FEG eguale a B, ed al punto F l' angolo EFG eguale a C, il terzo G sarà eguale al terzo A, ed i due triangoli ABC, EFG saranno equiangoli; dunque si avrà pel teorema precedente
BC : EF :: AB : EG;
ma, per ipotesi,
BC : EF :: AB : DE;
dunque EG è eguale a DE. Si avrà ancora pel teorema medesimo
BC : EF :: AC : FG;
ora, per ipotesi, si à
BC : EF :: AC : DF;
dunque FG è eguale a DF; quindi i triangoli EGF, DEF ànno i tre lati respettivamente eguali; dunque essi sono eguali (*Prop. 11, lib. I*). Ma, per costruzione, il triangolo EGF è equiangolo al triangolo ABC; dunque anche i triangoli ABC, DEF sono equiangoli e simili.

Quindi *due triangoli* etc. C. B. D.

*Scolio I.* Si vede da queste due ultime proposizioni, che nei triangoli la eguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità dei lati, e reciprocamente, in modo che una di queste condizioni basta per assicurare la similitudine dei triangoli. Non è lo stesso nelle figure di più di tre lati; poichè trattandosi dei soli quadrilateri, si può, senza cangiar gli angoli, alterare la proporzione dei lati, o senza alterare i lati cangiar gli angoli; così la proporzionalità dei lati non può essere una conseguenza dell'eguaglianza degli angoli, nè *viceversa*. Si vede, per Fig. 121. esempio, che conducendo EF parallela a BC (*fig. 121*)

gli angoli del quadrilatero AEFD sono eguali a quelli del quadrilatero ABCD : ma la proporzione dei lati è differente ; del pari, senza cangiar di lunghezza i quattro lati AB , BC , CD , AD, si può avvicinare o allontanare il punto B dal punto D , ciò che altererà gli angoli.

*Scolio II.* Le due proposizioni precedenti che propriamente non fanno che una sola , unite a quella del quadrato dell' ipotenusa , sono le proposizioni più importanti e più feconde della geometria ; bastano quasi esse sole a tutte le applicazioni ed alla risoluzione di tutti i problemi ; la ragione è che tutte le figure possono dividersi in triangoli , ed un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli. Perciò le proprietà generali dei triangoli racchiudono implicitamente quelle di tutte le figure.

## PROPOSIZIONE XX.

### TEOREMA.

*Due triangoli che ànno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali , sono simili.*

Sia l' angolo A eguale all' angolo D ( *fig. 122* ), e sia AB : DE :: AC : DF ; dico che il triangolo ABC è simile a DEF.

Prendasi AG eguale a DE , e conducasi GH parallela a BC , l' angolo AGH sarà eguale all' angolo ABC ( *Prop. 24, lib. I* ), ed il triangolo AGH sarà equiangolo al triangolo ABC ; si avrà dunque

AB : AG :: AC : AH ;

ma , per ipotesi ,

AB : DE :: AC : DF ;

e per costruzione AG è eguale a DE ; dunque AH è eguale a DF. I due triangoli AGH, DEF ànno un angolo eguale compreso fra lati eguali ; dunque essi sono eguali. Or il triangolo AGH è simile ad ABC ; dunque DEF è pure simile ad ABC.

Quindi *due triangoli* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XXI.

**TEOREMA.**

*Due triangoli che ànno i lati omologhi paralleli, o che gli ànno respettivamente perpendicolari, sono simili.*

Fig. 123. 1.° Siano i triangoli ABC, DEF (*fig. 123*) che ànno i lati omologhi paralleli; dico che saranno essi triangoli simili.

Poichè essendo il lato AB parallelo al lato DE, il lato BC ad EF, l'angolo ABC sarà eguale a DEF (*Prop. 27, lib. I*); di più AC essendo parallelo a DF, l'angolo ACB sarà eguale a DFE, ed anche BAC ad EDF; dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli; dunque essi sono anche simili.

Fig. 124. 2° Sia il lato DE (*fig. 124*) perpendicolare ad AB, ed il lato DF ad AC; nel quadrilatero AIDH i due angoli I ed H saranno retti; i quattro angoli equivalgono insieme a quattro angoli retti (*Prop. 20, lib. I*); dunque i due rimanenti IAH, IDH equivalgono a due angoli retti. Ma i due angoli EDF, IDH equivalgono pure a due angoli retti; dunque l' angolo EDF è eguale all' angolo IAH o BAC; parimente se il terzo lato EF è perpendicolare al terzo lato BC, si dimostrerà che l' angolo DFE è eguale a C, e DEF a B; dunque i due triangoli ABC, DEF che ànno i lati respettivamente perpendicolari, sono equiangoli e simili.

*Scolio*. Nel caso dei lati paralleli i lati omologhi sono i lati paralleli, ed in quello dei lati perpendicolari sono i lati perpendicolari. Così in quest' ultimo caso DE è omologo ad AB, DF ad AC, ed EF a BC.

Il caso dei lati perpendicolari potrebbe offrire una situazione relativa dei due triangoli, differente da quella che è supposta nella figura 124; ma l'eguaglianza degli angoli respettivi si dimostrerebbe sempre, o col mezzo dei quadrilateri, come AIDH, del quale due angoli sono retti, o col paragone di due triangoli, che con angoli opposti al vertice avrebbero ciascuno un angolo retto; d' altronde si potrebbe sempre supporre che si fosse costrutto dentro del triangolo ABC un triangolo DEF, i cui lati fossero paralleli a quelli del triangolo paragonato ad ABC, ed allora la dimostrazione rientrerebbe nel caso della figura 124.

## PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

*Le rette tirate comunque dal vertice di un triangolo dividono proporzionalmente la base e qualunque parallela a questa che è racchiusa entro il triangolo e terminata dagli altri due lati.*

Siano le rette AF, AG, AH ( *fig. 125* ) tirate comunque dal vertice A del triangolo ABC; dico che esse dividono proporzionalmente la base BC e la sua parallela DE ; talmente che si à Fig. 125.

DI : BF :: IK : FG :: KL : GH , etc.

Infatti, siccome DI è parallela a BF, il triangolo ADI è equiangolo ad ABF , e si à la proporzione

DI : BF :: AI : AF ;

similmente essendo IK parallela ad FG , si à

AI : AF :: IK : FG ;

dunque a cagione del rapporto comune AI : AF, si avrà

DI : BF :: IK : FG.

Si troverà similmente IK : FG :: KL : GH etc.

Dunque la linea DE è divisa ne' punti I, H, L, come la base BC nei punti F, G, H. Quindi *le rette tirate comunque* etc. C. B. D.

*Corollario.* Dunque, se BC fosse divisa in parti eguali nei punti F, G, H, la parallela DE sarebbe divisa anche in parti eguali nei punti I , K , L.

## PROPOSIZIONE XXIII.

### TEOREMA.

*In ogni triangolo rettangolo, se dall' angolo retto si abbassi la perpendicolare sopra l'ipotenusa, i due triangoli parziali saranno simili fra loro, ed al triangolo totale; ciascun cateto sarà medio proporzionale fra la base ed il segmento adiacente, e la perpendicolare è media proporzionale tra i due segmenti della base.*

Fig. 126. Se dall' angolo retto A ( *fig. 126* ) si abbassi la perpendicolare AD sopra BD; dico 1.° che i due triangoli parziali ABD, ADC saranno simili fra loro ed al triangolo totale ABC; 2.° ogni cateto AB, AC sarà medio proporzionale tra la ipotenusa BC ed il segmento adiacente BD o DC; 3.° ed infine la perpendicolare AD sarà medio proporzionale tra i due segmenti BD, DC.

1.° Infatti il triangolo BAD ed il triangolo BAC ànno l' angolo comune B; di più l'angolo retto BDA è eguale all' angolo retto BAC; dunque il terzo angolo BAD dell' uno è eguale al terzo angolo C dell' altro; dunque questi due triangoli sono equiangoli, e perciò simili. Si dimostrerà parimente che il triangolo DAC è simile al triangolo BAC; dunque i tre triangoli sono equiangoli e simili fra loro.

2.° Poichè il triangolo BAD è simile al triangolo BAC, i loro lati omologhi sono proporzionali. Ora il lato BD del triangolo BAD è omologo al lato BA del triangolo BAC, perchè sono opposti ad angoli eguali BAD, BCA; l' ipotenusa BA è omologa all' ipotenusa BC; dunque si può stabilire la proporzione

BD : BA :: BA : BC.

Si avrebbe nella stessa maniera

DC : AC :: AC : BC.

Dunque 2.° ciascuno dei cateti è medio proporzionale tra l' ipotenusa ed il segmento adiacente a questo cateto.

3.° Finalmente la similitudine dei triangoli ABD, ADC dà, paragonando i lati omologhi, BD : AD :: AD : DC; dunque 3.° la perpendicolare AD è media proporzionale tra i segmenti BD, DC dell' ipotenusa.

Quindi *in ogni triangolo rettangolo* etc. C. B. D.

*Scolio.* La proporzione BD : AB :: AB : BC dà, eguagliando il prodotto degli estremi a quello dei medi, il quadrato di AB eguale a BD moltiplicata per BC; si à similmente il quadrato di AC eguale a DC moltiplicata per BC; dunque la somma dei quadrati di AB ed AC è eguale a BD moltiplicata per BC più DC moltiplicata pure per BC; il secondo membro è la stessa cosa che BD più DC, ovvero BC moltiplicata per BC, cioè il quadrato di BC; dunque si à il quadrato di BC eguale alla somma dei quadrati di AB, AC; dunque il quadrato fatto sull' ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra i cateti. Ritornasi così alla proposizione del quadrato dell'ipotenusa per una via differentissima da quella che erasi tenuta, donde si vede che a parlar propriamente, la proposizione del quadrato della ipotenusa è una conseguenza della proporzionalità dei lati nei triangoli equiangoli. Così le proporzioni fondamentali della geometria si riducono, per così dire, a questa sola, cioè che i triangoli equiangoli ànno i loro lati omologhi proporzionali.

Accade spesso, come ora se n'è veduto un esempio, che tirando conseguenze da una o più proposizioni, si ricade sopra proposizioni già dimostrate. Generalmente, ciò che caratterizza particolarmente i teoremi di geometria, e ciò che è una pruova invincibile della loro esattezza si è che combinandoli insieme in una maniera qualunque, purchè sia giusto il ragionamento, si ricade sempre sopra resultati esatti. Non sarebbe lo stesso se qualche proposizione fosse falsa, o non fosse vera che presso a poco; accaderebbe spesso che, per mezzo della combinazione delle proposizioni fra loro, l' errore si accrescerebbe e diventerebbe sensibile. Se ne vedono esempi in tutte le dimostrazioni dove ci serviamo della *riduzione all' assurdo.* Tali dimostrazioni in cui l' oggetto è di provare che due quantità sono eguali, consistono in far vedere che se si ammettesse fra esse la minima diseguaglianza, ne risulterebbe per mezzo di una serie di ragionamenti un' assurdità manifesta e palpabile; dal che è d' uopo conchiudere che quelle due quantità sono eguali.

*Corollario.* Se da un punto A ( *fig. 127* ) della circonferenza si conducano le due corde AB, AC alle estremità del diametro BC, il triangolo BAC sarà rettangolo ( *Prop. 18*, *Coroll. II*, *lib. II* ); dunque : Fig. 127.

1.° *La perpendicolare AD è media proporzionale fra i due segmenti BD, DC del diametro;* ovvero, il che torna lo stesso, il quadrato AD è eguale al rettangolo BD moltiplicato per DC.

2.° *La corda AB è media proporzionale fra il diametro BC ed il segmento adiacente BD;* o, ciò che torna lo stesso, il quadrato di AB è eguale a BD moltiplicato per BC. Si à parimente il quadrato di AC eguale a CD moltiplicato per BC; dunque $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD:BC:DC$; e se si paragona $\overline{AB}^2$ a $\overline{BC}^2$, si avrà $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: BD:BC$; si avrebbe pure $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 ::$ BC. Questo rapporto dei quadrati dei lati fra loro, non che col quadrato dell' ipotenusa, son già stati dati nei corollarî III.° e IV.° della proposizione XI.

## PROPOSIZIONE XXIV.

### TEOREMA.

*Due triangoli che ànno un angolo eguale, stanno fra loro come i rettangoli dei lati, che comprendono l'angolo eguale.*

Fig. 128. Siano i triangoli ABC, ADE (*fig. 128*) che ànno eguale l'angolo A; dico che il triangolo ABC sta al triangolo ADE, come il rettangolo AB moltiplicato per AC sta al rettangolo AD moltiplicato per AE.

Tirisi BE; i due triangoli ABE, ADE che ànno il vertice comune E, ànno la medesima altezza, e stanno fra loro come le basi AB, AD (*Corol. Prop. 6*); dunque

ABE : ADE :: AB : AD.

Si à similmente

ABC : ABE :: AC : AE.

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendo il termine comune ABE, si avrà

ABC : ADE :: AB × AC : AD × AE.

Quindi *due triangoli che ànno* etc. C. B. D.

*Corollario.* Dunque i due triangoli sarebbero equiva-

lenti se il rettangolo di AB moltiplicato per AC fosse eguale al rettangolo di AD moltiplicato per AE, o se si avesse

$$AB : AD :: AE : AC,$$

ciò avrebbe luogo se la linea DC fosse parallela a BE.

## PROPOSIZIONE XXV.

### TEOREMA.

*Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Siano i triangoli simili ABC, DEF (*fig. 122*); dico che stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi. Fig. 122.

Sia l' angolo A eguale a D, e l'angolo B eguale ad E; primieramente per l' eguaglianza degli angoli A, D, si avrà, per la proposizione precedente,

$$ABC : DEF :: AB \times AC : DE \times DF.$$

D' altronde si à, per la similitudine dei triangoli,

$$AB : DE :: AC : DF.$$

E se si moltiplichi questa proporzione termine a termine per la proporzione identica

$$AC : DF :: AC : DF,$$

ne resulterà

$$AB \times AC : DE \times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

E quindi paragonando quest' ultima proporzione con la prima, si avrà

$$ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Quindi *due triangoli simili* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

*Due poligoni simili sono composti di un medesimo numero di triangoli simili respettivamente e similmente disposti.*

Fig. 129. Siano i due poligoni simili ABCDE, FGHIK (*fig. 129*); dico che questi poligoni sono composti di un medesimo numero di triangoli simili respettivamente e similmente disposti.

Nel poligono ABCDE conducansi dal vertice di uno stesso angolo A le diagonali AC, AD agli altri angoli; nell'altro poligono FGHIK conducansi similmente dall'angolo F omologo ad A le diagonali FH, FI.

Poichè i poligoni sono simili, l'angolo ABC è eguale al suo omologo FGH (*Def. 2*), e di più i lati AB, BC sono proporzionali ai lati FG, GH; talmente che si à

AB : FG :: BC : GH.

Ne segue da ciò che i triangoli ABC, FGH ànno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali; dunque sono simili (*Prop. 20*); quindi l'angolo BCA è eguale a GHF. Questi angoli eguali essendo tolti dagli angoli eguali BCD, GHI, i resti ACD, FHI saranno eguali; ma poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si à

AC : FH :: BC : GH;

d'altronde per la similitudine dei poligoni (*Def. 2*)

BC : GH :: CD : HI;

dunque

AC : FH :: CD : HI;

ma si è già veduto che l'angolo ACD è eguale all'angolo FHI; dunque i triangoli ACD, FHI ànno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali; dunque essi sono simili.

Si può continuare similmente a dimostrare la simiglianza dei triangoli seguenti, qualunque fosse il numero dei lati dei poligoni proposti; dunque *due poligoni simili sono composti di un medesimo numero di triangoli simili e similmente disposti.* C. B. D.

*Scolio.* La proposizione inversa è egualmente vera:

*se due poligoni sono composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente disposti, questi due poligoni saranno simili.*

Poichè la simiglianza dei triangoli respettivi darà l'angolo ABC eguale a FGH, BCA eguale a GHF, ACD eguale a FHI; dunque BCD è eguale a GHI; così pure CDE è eguale ad HIK etc. Di più si avrà

AB : FG :: BC : GH :: AC : FH :: CD : KI etc.;

dunque i due poligoni ànno gli angoli eguali ed i lati proporzionali, e perciò essi sono simili.

## PROPOSIZIONE XXVII.

### TEOREMA.

*I contorni o perimetri dei poligoni simili stanno come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi medesimi lati.*

Siano i poligoni simili ABCDE, FGHIK (*fig.* 129); Fig. 129. dico che i contorni o perimetri di essi stanno come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi medesimi lati.

1.° Infatti avendosi, per la natura delle figure simili,

AB : FG :: BC : GH :: CD : HI etc.,

si può conchiudere da questa serie di rapporti eguali, che la somma degli antecedenti AB più BC più CD etc. perimetro della prima figura sta alla somma dei conseguenti FG più GH più HI etc. perimetro della seconda figura, come un antecedente sta al suo conseguente, ovvero come il lato AB sta al suo omologo FG.

2.° Poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si à (*Prop.* 25)

$$\text{ABC} : \text{FGH} :: \overline{\text{AC}}^2 : \overline{\text{FH}}^2;$$

similmente i triangoli simili ACD, FHI danno

$$\text{ACD} : \text{FHI} :: \overline{\text{AC}}^2 : \overline{\text{FH}}^2;$$

dunque a motivo del rapporto comune $\overline{\text{AC}}^2 : \overline{\text{FH}}^2$, si à

$$\text{ABC} : \text{FGH} :: \text{ACD} : \text{FHI}.$$

Con un ragionamento simile si troverebbe ,

ACD : FHI :: ADE : FIK;

e così di seguito, se vi fosse un maggior numero di triangoli. Da questa serie di rapporti eguali si conchiuderà: la somma degli antecedenti ABC più ACD più ADE, od il poligono ABCDE, sta alla somma dei conseguenti FGH più FHI più FIK, od al poligono FGHIK, come un antecedente ABC sta al conseguente FGH , o come $\overline{AB}^2$ sta a $\overline{FG}^2$ ; dunque le superficie dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi. Quindi *i contorni o perimetri* etc. C. B. D.

*Corollario.* Se si costruiscano tre figure simili, i cui lati omologhi siano eguali ai tre lati di un triangolo rettangolo, la figura fatta sul lato maggiore sarà eguale alla somma delle altre due ; poichè queste tre figure sono proporzionali ai quadrati de' loro lati omologhi ; ora il quadrato dell' ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati dei cateti ; dunque etc.

## PROPOSIZIONE XXVIII.

### TEOREMA.

*Le parti di due corde che si tagliano in un circolo , sono reciprocamente proporzionali.*

Fig. 130. Siano le due corde AB , CD ( *fig. 130* ) che si tagliano dentro il cerchio ABD; dico che le loro parti sono reciprocamente proporzionali : cioè si à

AO : DO :: CO : OB.

Congiungansi AC, BD ; nei triangoli ACO, BOD gli angoli in O sono eguali, come opposti al vertice : l' angolo A è eguale all' angolo D, perchè sono iscritti nello stesso segmento ( *Prop. 18*, *Corol. 1*, *lib. II* ) ; per la medesima ragione l' angolo C è eguale all' angolo B ; dunque questi triangoli sono simili , ed i lati omologhi danno la proporzione

AO : DO :: CO : OB.

Quindi *le parti di due corde* etc. C. B. D.

*Corollario.* Si ricava da ciò AO moltiplicata per OB

eguale a DO moltiplicata per CO; dunque il rettangolo delle due parti dell' una corda è eguale al rettangolo delle due parti dell' altra.

## PROPOSIZIONE XXIX.

### TEOREMA.

*Se da un punto preso fuori di un cerchio si menino delle secanti, le secanti intere saranno reciprocamente proporzionali alle parti esterne.*

Se da uno stesso punto O ( *fig. 131* ), preso fuori Fig. 131. del cerchio, si conducano le secanti OB, OC terminate all' arco concavo BC; dico che le secanti intere OB, OC saranno reciprocamente proporzionali alle parti esterne OD, OA; cioè si avrà

OB : OC :: OD : OA.

Infatti, congiungendo AC, BD, i triangoli OAC, OBD ànno l' angolo O comune: di più l' angolo B eguale all' angolo C ( *Prop. 18*, *Corol. 1*, *lib. II* ); dunque questi due triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

OB : OC :: OD : OA.

Quindi *se da uno stesso punto* etc. C. B. D.

*Corollario.* Dunque il rettangolo di OB moltiplicata per OA è eguale al rettangolo di OC moltiplicata per OD.

*Scolio.* Si può osservare che questa proposizione à molta analogia colla precedente, e che ne differisce soltanto perchè le due corde AB, CD, invece di tagliarsi dentro del cerchio, si tagliano al di fuori. La proposizione seguente può ancora essere riguardata come un caso particolare di quest' ultimo.

## PROPOSIZIONE XXX.

### TEOREMA.

*Se da un punto preso fuori di un circolo si tirino una tangente ed una secante, la tangente sarà media proporzionale tra tutta la secante e la parte esterna.*

Fig. 132. Se dallo stesso punto O (*fig. 132*) preso fuori del cerchio tirinsi la tangente OA e la secante OC; dico che la tangente OA è media proporzionale fra OC ed OD; ciò che torna lo stesso,

$$\overline{OA}^2 = OC \times OD.$$

Infatti congiungendo AD ed AC, i triangoli OAD, OAC ànno l'angolo O comune, di più l'angolo OAD, formato da una tangente e da una corda (*Prop. 19, lib. II*). à per misura la metà dell'arco AD, e l'angolo C à la medesima misura; dunque l'angolo OAD è eguale a C; quindi i due triangoli sono simili, e si à la proporzione

$$OC : OA :: OA : OD$$

che dà

$$\overline{OA}^2 = OC \times OD.$$

Quindi *se da un punto* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XXXI.

### TEOREMA.

*In un triangolo, se si divida un angolo in due parti eguali con una retta terminata alla base, il rettangolo dei lati che comprendono l'angolo diviso sarà eguale al rettangolo dei segmenti della base, più il quadrato della retta che sega l'angolo.*

Fig. 133. Nel triangolo ABC (*fig.* 133), se si divida l'angolo A in due parti eguali colla linea retta AD; dico che il rettangolo dei lati AB, AC è eguale al rettangolo dei segmenti BD, DC, più il quadrato di AD.

Facciasi passare per i tre punti A, B, C la circonferenza, prolunghisi AD sino all'incontro di essa, e tirisi CE.

Il triangolo BAD è simile al triangolo EAC; poichè, per ipo-

tesi, l'angolo BAD è eguale ad EAC; di più l'angolo B è eguale all'angolo E, avendo ambidue per misura la metà dell'arco AC; dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

$$BA : AE :: AD : AC;$$

quindi resulta BA moltiplicata per AC eguale ad AE moltiplicata per AD; ma AE è eguale ad AD più DE; e moltiplicando da ambe le parti per AD, si à AE moltiplicata per AD eguale ad AD moltiplicata per AD, ovvero al quadrato di AD più DE moltiplicata per AD; quindi BA moltiplicata per AC è eguale al quadrato di AD più AD moltiplicata per DE; ma AD moltiplicata per DE è eguale a BD moltiplicata per DC (*Prop.* 28); quindi finalmente, AB moltiplicata per AC, ovvero il rettangolo delle AB, AC, è eguale al rettangolo delle BD, DC più il quadrato di AD; cioè

$$AB \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

Quindi *in un triangolo* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE XXXII.

### TEOREMA.

*In un triangolo, il rettangolo di due lati è eguale al rettangolo compreso dal diametro del cerchio circoscritto al triangolo, e dalla perpendicolare abbassata sul terzo lato dell'angolo opposto.*

Sia il triangolo ABC (*fig.* 134); io dico che il rettangolo dei due lati AB, AC è eguale al rettangolo compreso dal diametro CE del cerchio circoscritto e dalla perpendicolare AD abbassata sul terzo lato BC dall'angolo opposto A. Fig. 134.

Infatti, congiungendo AE, i triangoli ABD, AEC sono rettangoli l'uno in D e l'altro in A; di più l'angolo B è eguale all'angolo E; dunque questi triangoli sono simili, e danno la proporzione

$$AB : CE :: AD : AC;$$

dalla quale resulta il rettangolo delle AB, AC, lati dell'angolo A, eguale al rettangolo di CE, AD, l'una diametro del cerchio circoscritto, e l'altra perpendicolare abbassata sul terzo lato dell'angolo A.

Quindi *se in un triangolo* etc. C. B. D.

*Corollario.* Se si moltiplichino queste quantità eguali per la medesima quantità BC, si avrà AB moltiplicata per AC moltiplicata per BC eguale a CE moltiplicata per AD moltiplicata per BC. Ora AD moltiplicata per BC è il doppio della superficie del triangolo (*Prop.* 6); dunque *il prodotto de' tre lati di un trian-*

*golo è eguale alla superficie moltiplicata pel doppio del diametro del circolo circoscritto.*

Il prodotto di tre linee si chiama talora un *solido*, per una ragione che si vedrà in seguito. Il suo valore si concepisce facilmente immaginando che le linee sieno ridotte in numeri, e moltiplicando i numeri dei quali trattasi.

*Scolio.* Si può dimostrare ancora, *che la superficie di un triangolo è eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto.*

Poichè i triangoli AOB, BOC, AOC ( *fig.* 87 ), che ànno il vertice comune in O, ànno per altezza comune il raggio del cerchio iscritto; dunque la somma di questi triangoli sarà eguale alla somma delle basi, AB, BC, AC, moltiplicata per la metà del raggio OD; dunque la superficie del triangolo ABC è eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto.

## PROPOSIZIONE XXXIII.

### TEOREMA.

*In ogni quadrilatero iscritto in un cerchio, il rettangolo delle diagonali è eguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti.*

Fig. 135. Sia il quadrilatero iscritto ABCD ( *fig.* 135 ); dico il rettangolo delle due diagonali AC, BD essere eguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti; di modo che si à

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Prendasi l'arco CO eguale ad AD, e congiungasi BO che incontra la diagonale AC in I.

L'angolo ABD è eguale all'angolo CBI, poichè l'uno à per misura la metà dell'arco AD, e l'altro la metà dell'arco CO eguale ad AD. L'angolo ADB è eguale all'angolo BCI, perchè sono iscritti nel medesimo segmento AOB; dunque il triangolo ABD è simile al triangolo IBC, e si à la proporzione

$$AD : CI :: BD : BC :$$

donde resulta AD moltiplicata per BC eguale a CI moltiplicata per BD. Dico adesso che il triangolo ABI è simile al triangolo BDC; perchè essendo l'arco AD eguale a CO, se si aggiunga ad ambe le parti DO, si avrà l'arco AO eguale a DC; dunque l'angolo ABI è eguale all'angolo DBC; di più l'angolo BAI è eguale a BDC, perchè sono iscritti nel medesimo segmento; dunque i triangoli ABI, DBC sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

$$AB : BD :: AI : CD;$$

donde resulta AB moltiplicata per CD eguale ad AI moltiplicata

per BD. Aggiungendo i due resultati trovati, si avrà AD moltiplicata per BC, più AB moltiplicata per CD eguale a CI moltiplicata per BD, più AI moltiplicata per BD: ma AI moltiplicata per BD, più CI moltiplicata per BD è eguale ad AI più CI moltiplicata per BD, ovvero ad AC moltiplicata per BD; si avrà dunque la somma dei rettangoli di AD moltiplicata per BC, più AB moltiplicata per DC, eguale ad AC moltiplicata per BD (a).

Quindi *in ogni quadrilatero iscritto* etc. C. B. D.

*Scolio.* Si può dimostrare nella stessa maniera un altro teorema sul quadrilatero iscritto.

Il triangolo ABD simile a BIC dà pure la proporzione

$$BD : BC :: AB : BI,$$

donde resulta BI moltiplicata per BD eguale a BC moltiplicata per AB. Se congiungasi CO, il triangolo ICO, simile ad ABI, sarà simile a BDC, e darà la proporzione

$$BD : CO :: DC : OI,$$

donde resulta BD moltiplicata per OI eguale a CO moltiplicata per DC; o a cagione di CO eguale ad AD; OI moltiplicata per BD eguale ad AD moltiplicata per DC. Aggiungendo i due resultati, ed osservando che BI moltiplicata per BD, più OI moltiplicata per BD si riduce a BO moltiplicata per BD, si avrà

$$BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC.$$

Se si fosse preso BP eguale ad AD, e si fosse congiunta CKP, si sarebbe dimostrato con simili ragionamenti,

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Ma essendo l'arco BP eguale ad OC, se si aggiunga ad ambe le parti BC, si avrà l'arco CBP eguale a BCO; dunque la corda CP è eguale alla corda BO, e per conseguenza i rettangoli BO moltiplicata per BD, e CP moltiplicata per CA stanno fra loro come BD sta a CA; dunque

$$BD : CA :: AB \times BC + AD \times DC : AD \times AB + BC \times CD.$$

Dunque *le due diagonali di un quadrilatero iscritto stanno fra loro come le somme dei rettangoli dei lati adiacenti alle loro estremità.*

Questi due teoremi possono servire per trovare le diagonali quando si conoscono i lati.

(a) *Questo teorema è ricevuto dal 1.° libro dell' Almagesto di Tolommeo, ed è utilissimo per la trigonometria.* ( Il Trad. )

## PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

*Dato un punto dentro un cerchio e sopra un raggio qualunque, si prenda un punto fuori del cerchio sul prolungamento dello stesso raggio, talmente che il raggio sia media proporzionale fra la porzione di esso compreso fra il centro ed il punto interno, e tutta la retta compresa fra lo stesso centro ed il punto esterno; e se da un punto qualunque della circonferenza si tirino delle linee rette ai due punti, queste staranno da per tutto nello stesso rapporto.*

Sia P ( *fig.* 136 ) un punto qualunque dentro del cerchio sul raggio AC, e sia preso un punto Q fuori sul prolungamento dello stesso raggio, talmente che si abbia la proporzione

$$CP : CA :: CA : CQ;$$

e se da un punto qualunque M della circonferenza si tirino ai due punti P e Q le rette MP, MQ; dico che queste rette staranno da per tutto nel medesimo rapporto, e che si avrà sempre

$$MP : MQ :: AP : AQ.$$

Infatti si à per supposizione,

$$CP : CA :: CA : CQ;$$

mettendo CM in luogo di CA, si avrà

$$CP : CM :: CM : CQ;$$

dunque i triangoli CPM, CQM ànno un angolo C eguale compreso fra lati proporzionali, quindi essi sono simili ( *Prop.* 20, *lib. III* ); dunque il terzo lato MP sta al terzo lato MQ come CP a CM o CA. Ma la proporzione

$$CP : CA :: CA : CQ$$

dà, *dividendo*,

$$CP : CA :: CA - CP : CQ - CA,$$

ovvero

$$CP : CA :: AP : AQ;$$

dunque

$$MP : MQ :: AP : AQ.$$

Quindi *dato un punto* etc. C. B. D.

# PROBLEMI

## RELATIVI AL TERZO LIBRO

### PROBLEMA I.

*Dividere una linea retta data in quante parti eguali si voglia, ovvero in parti proporzionali ad altre linee date.*

1.° Sia proposto di dividere la linea AB ( *fig. 137* ) Fig. 137. in cinque parti eguali; dall' estremità A si condurrà la retta indefinita AG, e prendendo AC di una grandezza qualunque, si adatterà AC cinque volte sopra AG; si uniranno l' ultimo punto di divisione G e l' estremità B colla linea retta BC, poi si condurrà CI parallela a GB; dico che AI sarà la quinta parte della linea AB, e che portando AI cinque volte sopra AB, la linea AB sarà divisa in cinque parti eguali.

Infatti, poichè CI è parallela a GB, i lati AG, AB sono tagliati proporzionalmente in C ed I ( *Prop. 15* ). Ma AC è la quinta parte di AG; dunque AI è la quinta parte di AB.

2.° Sia proposto di dividere la linea AB ( *fig. 138* ) Fig. 138. in parti proporzionali alle linee rette date P, Q, R. Dall'estremità A tirisi l'indefinita AG; prendansi AC eguale a P, CD eguale a Q, DE eguale ad R; uniscansi l'estremità B ed E, e per i punti C, D conducansi le CI, DK parallele a BE; dico che la linea AB sarà divisa in parti AI, IK, KB proporzionali alle linee date P, Q, R.

Infatti per le parallele CI, DK, EB le parti AI, IK, KB sono proporzionali alle parti AC, CD, DE ( *Prop. 15* ); e per costruzione quest' ultime sono eguali alle linee date P, Q, R; dunque la linea AB è stata divisa nelle parti AI, IK, KB proporzionali alle date P, Q, R. Dunque *data una linea retta si è divisa in quante parti eguali si è voluto, ed in parti proporzionali ad altre linee date.* C. B. F.

## PROBLEMA II.

*Trovare una quarta proporzionale a tre rette date.*

Fig. 139. Siano date le tre rette A , B , C ( *fig. 139*), trovare una quarta proporzionale a queste. Tirinsi le due rette indefinite BE , DF sotto un angolo qualunque. Sopra DE prendasi DA eguale ad A , e DB eguale a B ; sopra DF prendasi DC eguale a C ; tirisi AC, e pel punto B la BX parallela ad AC ; dico che DX sarà la quarta proporzionale cercata.

Infatti, siccome BX è parallela ad AC, si à la proporzione

DA : DB :: DC : DX ;

ora i tre primi termini di questa proporzione sono eguali alle tre linee date ; dunque DX è la quarta proporzionale richiesta. Dunque *date tre rette si è trovata la quarta proporzionale a queste.* C. B. F.

*Corollario.* Si troverà similmente una terza proporzionale alle due linee date A, B ; poichè essa sarà la stessa che la quarta proporzionale alle tre linee A , B, C.

## PROBLEMA III.

*Trovare una media proporzionale tra due rette.*

Fig. 140. Tra due linee rette A, B ( *fig. 140* ) bisogna trovare una media proporzionale.

Sopra una linea indefinita DF prendasi DE eguale ad A , ed EF eguale a B ; sulla linea totale DF, come diametro , descrivasi la mezza circonferenza DGF ; dal punto E innalzisi al diametro la perpendicolare EG, che incontra la circonferenza in G ; dico EG essere la media proporzionale cercata.

Infatti la perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti del diametro DE, EF ( *Prop. 23* ) ; or questi segmenti sono eguali alle linee date A e B ; dunque EG è la media proporzionale fra le A e B. Quindi *date due rette si è trovata la media proporzionale.* C. B. F.

## PROBLEMA IV.

*Dividere una linea retta data in due parti, di maniera che la maggiore sia media proporzionale tra la linea intera, e l' altra parte.*

Data la linea AB ( *fig. 141* ), fa d' uopo dividerla in due parti in modo che la maggiore sia media proporzionale fra la tutta e la minore.

Dall' estremità B della linea AB innalzisi la perpendicolare BC eguale alla metà di AB; dal punto C, come centro, e col raggio BC descrivasi una circonferenza; tirisi AC che taglierà la circonferenza in D; e prendasi AF eguale ad AD; io dico che la linea AB sarà divisa nel punto F nella maniera domandata; cioè che si avrà

AB : AF :: AF : FB.

Infatti AB essendo perpendicolare all' estremità del raggio CB, è una tangente; e se si prolunghi AC fino a che incontri di nuovo la circonferenza in E, si avrà ( *Prop. 30* )

AE : AB :: AB : AD;

dunque, *dividendo*,

AE — AB : AB :: AB — AD : AD.

Ma poichè il raggio BC è metà di AB, il diametro DE è eguale ad AB, e per conseguenza AE meno AB è eguale ad AD eguale ad AF; si à pure, per essere AF eguale ad AD, AB meno AD eguale ad FB; dunque

AF : AB :: FB : AD o AF;

dunque, *invertendo*,

AB : AF :: AF : FB.

Quindi *data una linea AB si è divisa in modo che la parte maggiore è media proporzionale tra la tutta e la parte minore.* C. B. F.

*Corollario.* Questa divisione della linea AB si chiama divisione in *media ed estrema ragione:* se ne vedrà l' applicazione. Si può osservare che la secante AE è divisa in media ed estrema ragione nel punto D; infatti, poichè AB è eguale a DE, si à

AE : DE :: DE : AD.

## PROBLEMA V.

*Per un punto dato dentro di un angolo dato, tirare una retta in maniera che le parti comprese fra il punto ed i due lati dell' angolo siano eguali.*

Fig. 142. Sia dato il punto A ( *fig. 142* ) dentro l'angolo BCD; fa d'uopo tirare la retta BD in maniera che le parti AB, AD, comprese fra il punto A ed i lati CB, CD, siano eguali.

Pel punto A tirisi AE parallela a CD; prendasi BE eguale a CE, e per i punti B ed A tirisi BAD; dico BAD essere la linea domandata.

Infatti, AE essendo parallela a CD, si à

BE : EC :: BA : AD;

ora BE è eguale ad EC; dunque BA sarà eguale ad AD.

Quindi *per un dato punto dentro di un angolo dato si è tirata una retta in modo, che le parti comprese fra il punto ed i due lati dell' angolo sono eguali.* C.B.F.

## PROBLEMA VI.

*Fare un quadrato equivalente ad un parallelogrammo, o ad un triangolo dato.*

Fig. 143. 1° Sia ABCD il parallelogrammo dato ( *fig. 143* ), AB la sua base, e DE la sua altezza; fa d' uopo costruire un quadrato equivalente a tale parallelogrammo.

Tra AB e DE trovisi la media proporzionale XY ( *Prob. 3* ); dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al parallelogrammo ABCD.

Infatti si à per costruzione

AB : XY :: XY : DE;

dunque, eguagliando il prodotto degli estremi a quello dei medi, si à XY moltiplicata per XY, ovvero il quadrato di XY eguale ad AB moltiplicata per DE : ora quest'ultimo prodotto è la misura del parallelogrammo ABCD; dunque il quadrato di XY è equivalente al parallelogrammo dato.

Fig. 144 Sia BCA ( *fig. 144* ) il triangolo dato, BC la sua base, AD la sua altezza; fa d' uopo costruire un quadrato equivalente a questo triangolo.

Trovisi una media proporzionale fra BC e la metà di

AD, e sia XY questa media; dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al triangolo ABC.

Poichè, siccome si à

$$BC : XY :: XY : \frac{1}{2} AD,$$

ne resulta il quadrato di XY eguale a BC moltiplicata per la metà di AD: ma BC moltiplicata per la metà di AD è la misura del triangolo ABC; dunque il quadrato di XY è equivalente al triangolo ABC.

Quindi *dato un parallelogrammo si è fatto un quadrato ed un triangolo, ciascuno equivalente a tale parallelogrammo*. C. B. F.

## PROBLEMA VII.

*Sopra una data linea retta fare un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato.*

Sulla data linea retta AD (*fig. 145*) bisogna fare Fig. 145. un rettangolo equivalente al rettangolo dato ABFC.

Trovisi una quarta proporzionale alle tre linee AD, AB, AC, e sia AX questa quarta proporzionale; dico che il rettangolo fatto sopra AD ed AX sarà equivalente al rettangolo ABFC.

Infatti, avendosi

$$AD : AB :: AC : AX$$

ne resulta AD moltiplicata per AX eguale ad AB moltiplicata per AC; dunque il rettangolo ADEX è equivalente al rettangolo ABFC.

Quindi *sopra una data linea retta si è fatto un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato*. C. B. F.

## PROBLEMA VIII.

*Trovare in linee il rapporto del rettangolo di due linee date al rettangolo di due altre linee date.*

Dati i due rettangoli, uno delle linee A e B (*fig. 148*) Fig. 148. e l' altro delle C e D; fa d' uopo trovarne il rapporto in linee.

Sia X una quarta proporzionale alle tre linee B, C, D; dico che il rapporto delle due linee A e X sarà eguale

a quello dei due rettangoli A moltiplicata per B, e C moltiplicata per D.

Infatti avendosi

$$B : C :: D : X,$$

ne resulta C moltiplicata per D eguale a B moltiplicata per X; dunque

$$A\times B : C\times D :: A\times B : B\times X :: A : X.$$

Dunque *dati due rettangoli si è trovato il loro rapporto in linea*. C. B. F.

*Corollario*. Dunque per avere il rapporto dei quadrati fatti sopra le linee A, C, trovisi una terza proporzionale X alle linee A e C, talmente che si abbia

$$A : C :: C : X$$

e si avrà

$$A^2 : C^2 :: A : X.$$

## PROBLEMA IX.

*Trovare in linee il rapporto del prodotto di tre linee date al prodotto di tre altre linee date.*

Fig. 149. Sia proposto di trovarsi in linee il rapporto del prodotto delle tre linee date A, B, C ( *fig. 149* ), al prodotto delle tre linee date P, Q, R.

Alle tre linee date P, A, B, trovisi una quarta proporzionale X; alle tre linee date C, Q, R, trovisi una quarta proporzionale Y. Le due linee X, Y staranno fra loro come i prodotti di A moltiplicata per B e per C, e di P moltiplicata per Q e per R.

Infatti, siccome si à

$$P : A :: B : X,$$

si à A moltiplicata per B eguale a P moltiplicata per X; e moltiplicando ambe le parti per C, sarà A moltiplicata per B e per C eguale a C moltiplicata per P e per X.

Similmente, siccome

$$C : Q :: R : Y,$$

ne resulta Q moltiplicata per R eguale a C moltiplicata per Y, e moltiplicando ambe le parti per P, si à P moltipli-

cata per Q e per R eguale a P moltiplicata per C e per Y ; dunque il prodotto di A per B e per C sta al prodotto di P per Q e per R come il prodotto di C per P e per X sta al prodotto di C per P e per Y, o come X sta ad Y.

Dunque *si è trovato in linee il rapporto del prodotto di tre linee date al prodotto di tre altre linee date.* C. B. F.

## PROBLEMA X.

*Fare un triangolo equivalente ad un poligono dato.*

Sia ABCDE il poligono dato (*fig. 146*) ; fa d'uopo fare un triangolo equivalente a questo poligono. Fig. 146.

Tirisi primieramente la diagonale CE che tolga dal poligono il triangolo CDE. Pel punto D tirisi DF parallela a CE finchè incontri AE prolungata ; congiungasi CF , ed il poligono ABCDE sarà equivalente al poligono ABCF che à un lato di meno.

Poichè i triangoli CDE , CFE ànno la base comune CE ; essi ànno pure la medesima altezza , perchè i loro vertici D , F sono situati sopra una linea DF parallela alla base ; dunque questi triangoli sono equivalenti : aggiungendo ad ambe le parti la figura ABCE, si avrà da una parte il poligono ABCDE , e dall' altra il poligono ABCF , che saranno equivalenti.

Si può parimente togliere l'angolo B sostituendo al triangolo ABC il triangolo equivalente AGC , e così il pentagono ABCDE sarà cangiato in un triangolo equivalente GCF.

Lo stesso metodo si applicherà ad ogni altra figura: poichè diminuendo ad uno per volta il numero dei lati, si formerà finalmente il triangolo equivalente. Quindi *si è fatto un triangolo equivalente ad un poligono dato.* C.B.F.

*Scolio.* Si è già osservato che ogni triangolo può essere trasformato in un quadrato equivalente (*Prob.6*); così si troverà sempre un quadrato equivalente ad una figura rettilinea data : questo è ciò che si chiama *quadrare* la figura rettilinea , o trovarne la *quadratura.*

Il problema della *quadratura del cerchio* consiste nel trovare un quadrato equivalente ad un cerchio , di cui sia dato il diametro.

## PROBLEMA XI.

*Fare un quadrato che sia eguale alla somma od alla differenza di due quadrati dati.*

Fig. 147. Siano A e B ( *fig. 147* ) i lati dei quadrati dati.

1.° Bisogna trovare un quadrato eguale alla somma di questi quadrati. Tirinsi le due linee indefinite ED, EF ad angolo retto; prendasi ED eguale ad A, ed EG a B; congiungasi DG ; DG sarà il lato del quadrato cercato.

Infatti il triangolo DEG essendo rettangolo, il quadrato fatto sopra DG è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra ED , EG, ovvero alla somma dei quadrati di A e B ( *Prop. 11* ).

2.° Se bisogna trovare un quadrato eguale alla differenza dei quadrati dati , formisi parimente l' angolo retto FEH , prendasi GE eguale al minore dei lati A e B ; e dal punto G , come centro , e con un raggio GH eguale all' altro lato, descrivasi un arco che tagli EH in H; dico che il quadrato fatto sopra EH sarà eguale alla differenza dei quadrati fatti sopra le rette A e B.

Infatti il triangolo GEH è rettangolo , l' ipotenusa GH è eguale ad A , ed il lato GE eguale a B ; dunque il quadrato fatto sopra EH è eguale alla differenza dei quadrati fatti sopra EG e GH, ovvero dei quadrati dati (*Corol. I, Prop. 11* ). Quindi *si è fatto un quadrato eguale alla somma od alla differenza di due quadrati dati.* C. B. F.

*Scolio.* Si può trovare ancora un quadrato eguale alla somma di quanti quadrati si vuole; poichè la costruzione che ne riduce due ad un solo, ne ridurrà tre a due, e questi due ad uno , e così degli altri. Sarebbe lo stesso se qualche quadrato dovesse essere sottratto dalla somma degli altri.

## PROBLEMA XII.

*Costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato, come una retta data sta ad un' altra retta ancora data.*

Fig. 150 Sia dato il quadrato ABCD ( *fig. 150* ) ; fa d'uopo costruire un altro quadrato che stia al dato come la linea M sta alla linea N.

Sopra la linea indefinita EG prendasi EF eguale ad

M ; ed FG eguale ad N ; sopra EG, come diametro, descrivasi la circonferenza, e dal punto F alzisi al diametro la perpendicolare FH. Dal punto H tirinsi le corde HG , HE che prolungansi indefinitamente ; sulla prima prendasi HE eguale al lato AB del quadrato dato, e pel punto K tirisi KI parallela a GE ; dico che HI sarà il lato del quadrato cercato.

Infatti , per le parallele KI , GE , si à

$$HI : HK :: HE : HG ;$$

dunque

$$\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{GH}^2 ;$$

ma nei triangolo rettangolo EHG ( *Prop. 23* ) il quadrato di HE sta al quadrato di HG, come il segmento EF sta al segmento FG , o come M sta ad N ; dunque

$$\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: M : N.$$

Ma HK è eguale ad AB ; dunque il quadrato fatto sopra HI stà al quadrato fatto sopra AB come M sta ad N. Quindi *si è costruito un quadrato che sta ad un quadrato dato , come una retta data sta ad un' altra retta.* C. B. F.

## PROBLEMA XIII.

*Sopra un lato omologo ad un altro lato descrivere un poligono simile ad un poligono dato.*

Sopra il lato FG ( *fig. 129*) omologo ad AB, è d'uopo descrivere un poligono dato ABCDE. Fig. 129.

Nel poligono dato tirinsi le diagonali AC , AD ; al punto F facciasi l'angolo GFH eguale a BAC , ed al punto G l'angolo FGH eguale ad ABC : le linee rette FH, GH si taglieranno in H, ed FGH sarà un triangolo simile ad ABC. Similmente sopra FH, omologo ad AC, costruiscasi il triangolo FIH simile ad ADC , e sopra FI , omologo ad AD, costruiscasi il triangolo FIK simile ad ADE. Il poligono FGHIK sarà il poligono richiesto, cioè simile ad ABCDE.

Infatti questi due poligoni sono composti di un medesimo numero di triangoli simili , e similmente disposti ( *Prop. 26* ), e perciò sono simili. Quindi *sopra un lato omologo ad un altro lato si è descritto un poligono simile ad un poligono dato.* C. B. F.

## PROBLEMA XIV.

*Essendo date due figure simili, costruire una figura simile che sia eguale alla loro somma od alla loro differenza.*

Siano A e B due lati omologhi delle figure date: trovisi un quadrato eguale alla somma od alla differenza dei quadrati fatti sopra A e B; sia X il lato di questo quadrato; X sarà nella figura cercata il lato omologo ad A e B nelle figure date. Si costruirà in seguito questa figura pel precedente problema.

Poichè le figure simili stanno come i quadrati dei lati omologhi; ora il quadrato del lato X è eguale alla somma od alla differenza dei quadrati fatti sopra i lati omologhi A e B; dunque la figura fatta sul lato X è eguale alla somma od alla differenza delle figure simili fatte sopra i lati A e B. Quindi *essendo date due figure simili, si è costruita una figura simile ed eguale alla loro somma od alla loro differenza.* C. B. F.

## PROBLEMA XV.

*Costruire una figura simile ad una figura data, e che stia a questa figura nel rapporto dato di M a N.*

Sia A un lato della figura data; X il lato omologo nella figura cercata; bisognerà che il quadrato di X stia al quadrato di A come M a N (*Prop. 27*). Si troverà dunque X pel problema XII; e conoscendosi X si costruirà su di esso la figura simile alla data pel problema XIII; così *sarà costruita una figura simile alla data, ed il rapporto fra loro sarà di M a N.* C. B. F.

## PROBLEMA XVI.

*Costruire una figura simile ad una figura data ed equivalente ad un' altra figura ancora data.*

Fig. 151. Sia d'uopo costruirsi una figura simile alla figura P (*fig. 151*) ed equivalente alla figura Q.

Cerchisi il lato M del quadrato equivalente alla figura P, ed il lato N del quadrato equivalente alla figura Q (*Scol. Prob. 10*). Sia quindi X una quarta proporzionale alle

tre linee date M, N, AB; sul lato X omologo ad AB descrivasi una figura simile alla figura P; dico che sarà di più equivalente alla figura Q.

Poichè, chiamando Y la figura fatta sul lato X, si avrà (*Prop. 27*)

$$P : Y :: \overline{AB}^2 : X^2;$$

ma, per costruzione,

$$AB : X :: M^2 : N,$$

ovvero

$$\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2;$$

dunque

$$P : Y :: M^2 : N^2.$$

Ma si à pure per costruzione il quadrato di M eguale a P, ed il quadrato di N eguale a Q; dunque

$$P : Y :: P : Q;$$

ma P è eguale a P; dunque Y è eguale a Q; e perciò *la figura Y è simile alla figura P ed equivalente alla figura Q.* C. B. F.

## PROBLEMA XVII.

*Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, ed i cui lati adiacenti facciano una somma data.*

Sia dato il quadrato C (*fig. 152*); fa d' uopo costruire un rettangolo equivalente a questo quadrato, ed i cui lati adiacenti facciano una somma data AB. Fig 152.

Sopra AB, come diametro, descrivasi la semicirconferenza; tirisi parallelamente al diametro la linea DE ad una distanza AD eguale al lato del quadrato dato C. Dal punto E, ove la parallela taglia la circonferenza, abbassisi sul diametro la perpendicolare EF; dico che AF ed FB saranno i lati del rettangolo cercato.

Infatti la somma è eguale ad AB, ed il rettangolo delle AF, EB è eguale al quadrato di FE (*Corol. Prop. 23*): ma il quadrato di FE è eguale al quadrato di DA, ovvero a C; dunque *il rettangolo delle AF, FB è equi-*

*valente al quadrato C, ed i lati fanno una somma eguale alla data AB.* C. B. F.

## PROBLEMA XVIII.

*Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, ed i cui lati adiacenti abbiano fra loro una differenza data.*

Fig. 153. Sia dato un quadrato C (*fig. 153*); fa d'uopo costruire un rettangolo equivalente a questo quadrato, ed i cui lati adiacenti abbiano fra loro la differenza AB.

Sulla linea data AB, come diametro, descrivasi la circonferenza; all'estremità del diametro conducasi la tangente AD eguale al lato del quadrato C; pel punto D e pel centro O tirisi la secante DF; dico che DE, DF saranno i lati adiacenti del rettangolo richiesto.

Infatti 1.° la differenza di questi lati è eguale al diametro EF o AB; 2.° il rettangolo delle DE, DF è eguale al quadrato di AD (*Prop. 30*); dunque *si è costruito un rettangolo equivalente al quadrato dato C, ed i cui lati adiacenti ànno fra loro la data differenza AB.* C. B. F.

## PROBLEMA XIX.

*Trovare la comune misura, se ve n'è alcuna, tra la diagonale ed il lato del quadrato.*

Fig. 154. Sia ABCG (*fig. 154*) un quadrato qualunque, AC la sua diagonale; fa d'uopo trovare, se ve n'è, la comune misura tra la diagonale ed il lato di esso quadrato.

Bisogna principalmente adattare CB sopra CA tante volte, quante può esservi contenuto (*Prob. 17, lib. II*); e perciò descrivasi col centro C e col raggio CB il semicircolo DBE: si vede che CB è contenuto una volta in AC col resto AD: il resultato della prima operazione è dunque il quoziente 1 col resto AD, che bisogna paragonare con CB o col suo eguale AB.

Si può prendere AF eguale ad AD, e portare realmente AF sopra AB; si troverebbe che vi è contenuto due volte con un resto: ma siccome questo resto ed i seguenti vanno diminuendo, e che ben presto non vi si ravviserebbero per la loro picciolezza, questo non sarebbe che un mezzo meccanico imperfetto, dal quale non si potrebbe

nulla conchiudere per decidere se le linee AC, CB ànno fra loro o non ànno una misura comune; ora vi è un mezzo semplicissimo di evitare le linee decrescenti, e di operare sopra linee che resteranno sempre della medesima grandezza.

Infatti, l'angolo ABC essendo retto, AB è una tangente ed AE una secante tirata dal medesimo punto, di maniera che si à ( *Prop. 30* )

$$AD : AB :: AB : AE.$$

Così nella seconda operazione ove si tratta di paragonare AD con AB, si può invece del rapporto di AD ad AB prendere quello di AB ad AE: ora AB, o la sua eguale CD, è contenuta due volte in AE col resto AD; dunque il resultato della seconda operazione è il quoziente 2 col resto AD, che bisogna paragonare ad AB.

La terza operazione, che consiste nel paragonare AD con AB, si ridurrà parimente a paragonare AB o la sua eguale CD con AE; e si avrà anche 2 per quoziente ed AD per resto.

Da ciò si vede che l' operazione non avrà termine, e che non vi è alcuna comune misura fra la diagonale ed il lato del quadrato; verità ch' era già conosciuta per l' aritmetica (poichè queste due linee stanno fra loro come $\sqrt{2} : 1$ ) ( *Prop. 11* ), ma che acquista un maggior grado di chiarezza mediante la risoluzione geometrica.

*Scolio*. Non è dunque possibile trovare in numeri il rapporto esatto della diagonale al lato del quadrato; ma può trovarsi con approssimazione tanto quanto si vuole col mezzo della frazione continua, che è eguale a questo rapporto. La prima operazione à dato per quoziente 1; la seconda e tutte le altre all' infinito danno 2; onde la frazione della quale trattasi è

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \text{ etc. all' infinito.}}}}}$$

Per esempio, se si calcola questa frazione sino al quarto termine inclusivamente, si trova che il suo valore è

$1 \frac{12}{29}$ o $\frac{41}{29}$; talmente che il rapporto prossimo della diagonale al lato del quadrato è come 41 a 29. Si troverebbe un rapporto più approssimativo calcolando un maggior numero di termini.

# LIBRO QUARTO

## I POLIGONI REGOLARI E LA MISURA DEL CIRCOLO

### DEFINIZIONE

Un poligono che è equiangolo ed equilatero chiamasi *poligono regolare.*

Vi sono dei poligoni regolari di qualunque numero di lati. Il triangolo equilatero è quello di tre lati, ed il quadrato quello di quattro.

### PROPOSIZIONE PRIMA.

TEOREMA.

*Due poligoni regolari di un medesimo numero di lati sono due figure simili.*

Siano, per esempio, i due esagoni regolari ABCDEF ed *abcdef* ( *fig. 155* ); dico che questi due esagoni sono due figure simili. Fig. 155.

La somma degli angoli è la stessa nell'una e nell'altra figura; essa è eguale ad otto angoli retti ( *Prop. 20, lib. I* ); l'angolo A è la sesta parte di questa somma, egualmente che l'angolo *a*; dunque i due angoli A ed *a* sono eguali; lo stesso è, per conseguenza, degli angoli B e *b*, degli angoli C e *c* etc.

Di più, poichè per la natura di questi poligoni i lati AB, BC, CD etc. sono eguali; come pure *ab*, *bc*, *cd* etc., è chiaro che si ànno le proporzioni:

AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* etc.

dunque le due figure, delle quali trattasi, ànno gli an-

goli eguali ed i lati omologhi proporzionali; esse dunque sono simili ( *Def. 2, lib. III*). Quindi *due poligoni regolari* etc. C. B. D.

*Corollario.* I perimetri di due poligoni regolari di un medesimo numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi medesimi lati ( *Prop. 27, lib. III* ).

*Scolio.* L' angolo di un poligono regolare si determina dal numero dei lati, come quello di un poligono equiangolo ( *Prop. 20, lib. I* ).

## PROPOSIZIONE II.

**TEOREMA.**

*Ogni poligono regolare può essere iscritto nel cerchio, come ancora circoscritto al cerchio.*

Fig. 156. Sia ABCDEFGH ( *fig. 156* ) il dato poligono regolare; dico che può essere iscritto nel cerchio e circoscritto al circolo.

Immaginisi che si faccia passare per i tre punti A, B, C la circonferenza; sia O il centro, ed OP la perpendicolare abbassata sulla metà del lato BC; tirinsi AO, OD.

Il quadrilatero OPCD ed il quadrilatero OPBA possono essere sopraposti: infatti il lato OP è comune, l'angolo OPC eguale all' angolo OPB, poichè sono retti; dunque il lato PC si applicherà sul suo eguale PB, ed il punto C cadrà in B. Di più, per la natura del poligono, l' angolo PCB è eguale all' angolo PBA; dunque CD prenderà la direzione BA; e poichè CD è eguale ad AB, il punto D cadrà in A, ed i due quadrilateri coincideranno interamente l' uno con l' altro. La distanza OD è dunque eguale ad AO, e per conseguenza la circonferenza che passa per i tre punti A, B, C, passerà anche pel punto D: con un ragionamento simile si dimostrerà che la circonferenza che passa per i tre vertici B, C, D, passerà ancora pel vertice dell' angolo seguente E, e così di seguito; dunque la medesima circonferenza che passa per i punti A, B, C, passa per tutti i vertici degli angoli del poligono, ed il poligono sarà iscritto in questa circonferenza.

In secondo luogo, per rapporto a questa circonferen-

za, tutti i lati AB, BC, CD etc. sono corde eguali; esse sono dunque egualmente distanti dal centro (*Prop. 8, lib. II*); dunque se dal punto O, come centro, e col raggio OP si descriva una circonferenza, questa circonferenza toccherà il lato BC e tutti gli altri lati del poligono, ciascuno nel rispettivo punto medio, e la circonferenza sarà iscritta nel poligono, od il poligono circoscritto alla circonferenza. Quindi *ogni poligono regolare* etc. C. B. D.

*Scolio I.* Il punto O, centro comune del cerchio iscritto e del cerchio circoscritto, può essere riguardato pure come il centro del poligono, e per questa ragione si chiama *angolo al centro* l' angolo AOB, formato dai due raggi tirati alle estremità di un medesimo lato AB.

Poichè tutte le corde AB, BC, CD etc. sono eguali, egli è chiaro, che tutti gli angoli al centro sono eguali, e che perciò il valore di ciascuno si trova dividendo quattro angoli retti pel numero dei lati del poligono.

*Scolio II.* Per iscrivere un poligono regolare di un certo numero di lati in una data circonferenza, si tratta soltanto di dividere la circonferenza in tante parti eguali, quanti lati deve avere il poligono; poichè gli archi essendo eguali, le corde AB, BC, CD etc. (*fig. 158*) saranno eguali; i triangoli AOB, BOC, COD etc. saranno pure eguali, perchè sono equilateri fra loro; dunque la figura ABCDEF è un poligono regolare. Fig. 158.

## PROPOSIZIONE III.

### PROBLEMA.

*Iscrivere un quadrato in una circonferenza data.*

Sia data la circonferenza DCBA (*fig. 157*); fa d'uopo iscrivervi un quadrato. Fig. 157.

Tirinsi due diametri AC, BD che si taglino ad angoli retti; uniscansi le estremità A, B, C, D; dico la figura ABCD essere il quadrato iscritto.

Infatti essendo eguali gli angoli AOB, BOC etc., le corde AB, BC etc. sono eguali (*a*). Dunque *nella data circonferenza si è iscritto un quadrato.* C. B. F.

(a) Ovvero, per maggiore chiarezza, *essendo gli angoli AOB, BOC etc. eguali, le corde AB, BC etc. sono*

*Scolio*. Essendo il triangolo BOC rettangolo ed isoscele, si à ( *Prop. 11*, *Corol. 2*, *lib. III* )

$$BC : BO :: \sqrt{2} : 1;$$

dunque *il lato del quadrato iscritto stà al raggio come la radice quadrata di 2 sta all' unità.*

## PROPOSIZIONE IV.

### PROBLEMA.

*Iscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero in una circonferenza data.*

Fig. 158. Sia data la circonferenza ABCDEF ( *fig. 158* ); fà d'uopo iscrivere in essa un esagono regolare, ed un triangolo equilatero.

Suppongasi il problema risoluto; e sia AB un lato dell' esagono iscritto; se si conducano i raggi AO, OB; dico che il triangolo AOB sarà equilatero.

Poichè l' angolo AOB è la sesta parte di quattro angoli retti; così, prendendo l' angolo retto per unità, si avrà l'angolo AOB eguale a $\frac{4}{6}$ ovvero $\frac{2}{3}$; i due altri angoli ABO, BAO del medesimo triangolo valgono insieme a 2 meno $\frac{2}{3}$ ovvero $\frac{4}{3}$; e come sono eguali, ciascuno di essi è eguale a $\frac{2}{3}$; dunque il triangolo ABO è equilatero; quin-

*eguali, quindi il quadrilatero ABCD è equilatero; di più, per essere AC un diametro, l' angolo ABC è iscritto in un semicerchio, quindi è retto* ( Corol. 2, Prop. 18, lib. II ); *similmente si dimostrerebbe essere retto ciascuno degli angoli C, D, A; dunque il quadrilatero ABCD à i lati eguali e gli angoli retti; dunque è un quadrato. Quindi* nella data circonferenza si è iscritto un quadrato. *C. B. F.* ( Il Trad. )

di il lato dell'esagono iscritto è eguale al raggio.

Quindi resulta che per iscrivere un esagono regolare in una circonferenza data, bisogna adattare il raggio sei volte sulla circonferenza, con che si ritornerà sul punto stesso dal quale si era partito.

Essendo iscritto l'esagono ABCDEF, se si uniscano i vertici degli angoli alternativamente con linee rette, si formerà il triangolo equilatero ACE (*a*).

Dunque *nella data circonferenza si è iscritto un esagono regolare ed un triangolo equilatero*. C. B. F.

*Scolio*. La figura ABCO è un parallelogrammo, ed anche un rombo, poichè AB è eguale a BC, eguale a CO, eguale ad OA ( *Prop. 14, Corol. lib. III* ); dunque la somma dei quadrati delle diagonali AC, BO, è eguale alla somma dei quadrati dei lati; la quale è quattro volte il quadrato di AB, ovvero quattro volte il quadrato di BO, per essere AB eguale a BO; togliendo da ambe le parti il quadrato di BO, resterà il quadrato di AC eguale a tre volte il quadrato di BO; dunque

$$\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2 :: 3 : 1,$$

ovvero

$$AC : BO :: \sqrt{3} : 1;$$

dunque *il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 3 sta all' unità*.

(a) *Infatti gli archi ABC, CDE, EFA essendo eguali, le corde AC, CE, EA saranno eguali, ed il triangolo ACE perciò equilatero*. ( Il Trad. ).

## PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

*Iscrivere in un cerchio dato un decagono regolare, un pentagono ed un pentadecagono* (*a*).

Fig. 159. Sia dato il cerchio AHFD ( *fig. 159* ) ; fa d'uopo iscrivervi un decagono regolare, un pentagono ed un pentadecagono.

Dividasi il raggio AO in media ed estrema ragione nel punto M ( *Prop. 4*, *lib. III* ) ; prendasi la corda AB eguale al segmento maggiore OM ; dico AB essere il lato del decagono regolare, che bisognerà dieci volte adattare alla circonferenza.

Poichè tirando MB, si à per costruzione,

AO : OM :: OM : AM,

ovvero, per essere AB eguale ad OM,

AO : AB :: AB : AM ;

dunque i triangoli ABO, AMB ànno un angolo comune A compreso fra lati proporzionali ; dunque sono simili ( *Prop. 20*, *lib. III* ). Il triangolo OAB è isoscele ; dunque il triangolo AMB lo è pure, e si à AB eguale a BM ; d'altronde AB è eguale ad OM ; dunque MB è eguale ad OM ; quindi il triangolo BMO è isoscele.

L'angolo AMB esterno al triangolo isoscele BMO è doppio dell'interno O ( *Prop. 19*, *Corol. 6*, *lib. I* ) : ora l'angolo AMB è eguale ad MAB ; dunque il triangolo OAB è tale, che ciascuno degli angoli alla base OAB, OBA è doppio dell'angolo al vertice ; dunque i tre angoli del triangolo equivalgono a cinque volte l'angolo O, e perciò l'angolo O è la quinta parte di due angoli retti, o la decima parte di quattro angoli retti ; dunque l'arco è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare.

(a) *Decagono*, *da* δέκα ( *deca* ), dieci, *e da* γωνία ( *gônia* ) angolo.
*Pentadecagono*, *da* πέντε ( *pente* ), cinque, da δέκα ( *deca* ), dieci, e *da* γωνία ( *gônia* ) angolo. ( Il Trad. ).

*Corollario I.* Se si uniscano a due a due i vertici degli angoli del decagono regolare, si formerà il pentagono regolare ACEGI.

*Corollario II.* AB essendo sempre il lato del decagono, sia AL il lato dell'esagono; allora l'arco BL sarà per rapporto alla circonferenza $\frac{1}{6}$ meno $\frac{1}{10}$, ovvero $\frac{1}{15}$; dunque la corda BL sarà il lato del pentadecagono o poligono regolare di 15 lati. Si vede nel tempo stesso che l'arco CL è la terza parte di CB. Quindi *in un dato cerchio si è iscritto un decagono regolare, un pentagono ed un pentadecagono.*

*Scolio.* Essendo iscritto un poligono regolare, se si dividano gli archi sottesi dai suoi lati in due parti eguali, e si tirino le corde dei semi-archi, queste formeranno un nuovo poligono regolare d'un doppio numero di lati; così si vede che il quadrato può servire ad iscrivere successivamente i poligoni regolari di 8, 16, 32, etc. lati. Del pari l'esagono servirà ad iscrivere i poligoni regolari di 12, 24, 48, etc. lati; il decagono i poligoni di 20, 40, 80, etc. lati; il pentadecagono i poligoni di 30, 60, 120, etc. lati (*a*).

(a) *Si è creduto per molto tempo che questi poligoni fossero i soli che potessero essere iscritti per la geometria elementare, o pure, ciò che torna lo stesso, per mezzo della risoluzione dell'equazioni di primo e secondo grado; ma Gauss di Berlino à dimostrato, in un'opera intitolata* Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae, 1801, *che si può iscrivere con simili mezzi il poligono regolare di diciassette lati, ed in generale quello di* $2^n + 1$ *lati, purchè* $2^n + 1$ *sia un numero primo.*

# PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

*Essendo dato un poligono regolare iscritto, circoscrivere alla medesima circonferenza un poligono simile.*

Essendo dato il poligono regolare iscritto ABCDEF Fig. 160. ( *fig. 160* ) ; fa d' uopo circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile.

Dal punto T medio dell' arco AB tirisi la tangente GH, che sarà parallela ad AB ( *Prop. 10, lib. II* ) ; facciasi la stessa cosa alle metà di ciascuno degli altri archi CB, CD etc. ; queste tangenti formeranno colle loro intersezioni il poligono regolare circoscritto GHIKLM simile al poligono iscritto.

È facile vedere in prima che i tre punti O, B, H siano in linea retta, perchè i triangoli rettangoli OTH, OHN ànno l'ipotenusa comune OH, ed il lato OT eguale al lato ON ; dunque essi sono eguali ( *Prop. 18, lib. I* ) ; quindi l'angolo TOH è eguale ad HON, e per conseguenza la linea OH passa pel punto B mezzo dell'arco TN, per la stessa ragione il punto I è sul prolungamento di OC etc. Ma, poichè GH è parallela ad AB, ed HI a BC, l' angolo GHI è eguale ad ABC ( *Prop. 27, lib. I* ) : parimente HIK è eguale a BCD etc. ; dunque gli angoli del poligono circoscritto sono eguali a quelli del poligono iscritto. Di più per queste medesime parallele si à

$$GH : AB :: OH : OB$$

e

$$HI : BC :: OH : OB ;$$

dunque

$$GH : AB :: HI : BC.$$

Ma AB è eguale a BC, dunque GH è eguale ad HI. Per la stessa ragione HI è eguale ad IK etc. ; dunque i lati del poligono circoscritto sono eguali fra loro ; dunque questo poligono è regolare e simile al poligono iscritto. Quindi *essendo iscritto un poligono regolare si è circoscritto alla stessa circonferenza un poligono simile.* C. B. F.

*Corollario I.* Reciprocamente, se fosse dato il poli-

gono circoscritto GHIKLM, e bisognasse per esso costruire il poligono iscritto ABCDEF, basterebbe condurre ai vertici G, H, I etc. del poligono dato le linee OI, OH, OG, che incontrerebbero la circonferenza ai punti A, B, C etc.; si congiungerebbero poi questi punti colle corde AB, BC, CD etc. che formerebbero il poligono iscritto. Si potrebbe pure nel medesimo caso unire più semplicemente i punti di contatto T, N, P etc. colle corde TN, NP etc. ciò che formerebbe similmente un poligono iscritto simile al circoscritto.

*Corollario II.* Dunque si possono circoscrivere ad un circolo dato tutti i poligoni regolari che si sanno iscrivere in questo cerchio, e viceversa.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

*L' area di un poligono regolare è eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto.*

Sia il poligono regolare GHIKLM (*fig. 160*); dico che la sua area è eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto. Fig. 160.

Il triangolo GOH à per misura GH moltiplicato per la metà di OT; il triangolo OHI à per misura HI moltiplicato per la metà di ON: ma ON è eguale ad OT; dunque i due triangoli riuniti ànno per misura la somma GH più HI moltiplicata per la metà di OT. Continuando così per gli altri triangoli, si vedrà che la somma di tutti i triangoli, od il poligono intero, à per misura la somma delle basi GH, HI, IK, ovvero il suo perimetro moltiplicato per la metà di OT, metà del raggio del cerchio iscritto. Quindi *l' area di un poligono* etc. C. B. D.

*Scolio.* Il raggio del cerchio iscritto OT altro non è che la perpendicolare abbassata dal centro sopra uno dei lati del poligono; si chiama talora *l' apotema* del poligono (*a*).

(a) *Apotema*, *da* ἀπό ( *apo* ) da, *e da* τίθημι ( *tithemi* ) collocare. ( Il Trad. ).

## PROPOSIZIONE VIII.

**TEOREMA.**

*I perimetri dei poligoni regolari di un medesimo numero di lati stanno come i raggi dei circoli circoscritti, ed anche come i raggi dei circoli iscritti; le loro superficie stanno come i quadrati dei medesimi raggi.*

Fig. 161. Sia AB ( *fig. 161*) un lato d' uno dei poligoni di cui trattasi, O il suo centro, e per conseguenza OA il raggio del cerchio circoscritto, ed OD, perpendicolare sopra AB, il raggio del cerchio iscritto; sia parimente *ab* il lato d' un altro poligono simile, *o* il suo centro, *oa* ed *od* i raggi dei circoli circoscritto ed iscritto; dico che i perimetri di questi poligoni stanno come i raggi dei circoli circoscritti, ed anche come i raggi dei circoli iscritti; le loro superficie poi stanno come i quadrati dei medesimi raggi.

I perimetri dei due poligoni stanno fra loro come i lati AB, *ab*: ma gli angoli A ed *a* sono eguali, essendo ciascuno la metà dell' angolo del poligono, ed eguali sono ancora gli angoli B e *b*; dunque i triangoli ABO, *abo* sono simili, come pure i triangoli rettangoli ADO, *ado*, dunque

AB : *ab* :: AO : *ao* :: DO : *do*;

dunque i perimetri dei poligoni regolari del medesimo numero di lati stanno fra loro come i raggi AO, *ao* dei circoli circoscritti; ed anche come i raggi OD, *od* dei circoli iscritti.

Le superficie di questi medesimi poligoni stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; esse stanno in conseguenza anche come i quadrati dei raggi dei circoli circoscritti AO, *ao*, o come i quadrati dei raggi dei circoli iscritti OD, *od*. Quindi *i perimetri dei poligoni* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IX.

### LEMMA.

*Ogni linea curva o poligona che circonda da una estremità all' altra una linea convessa, è maggiore della linea circondata.*

Ogni linea curva o poligona che circonda da una estremità all' altra la linea convessa AMB ( *fig. 162* ), è maggiore della linea circondata AMB. Fig. 162.

Abbiamo già detto che per linea convessa s' intende una linea curva o poligona, od in parte curva ed in parte poligona, tale che una linea retta non possa tagliarla in più di due punti. Se la linea AMB avesse delle parti rientranti o delle sinuosità, cesserebbe d'esser convessa, perchè è facile vedere che una linea retta potrebbe tagliarla in più di due punti. Gli archi di circolo sono essenzialmente convessi; ma la proposizione della quale trattasi presentemente si estende a qualunque linea, che avesse la condizione richiesta.

Ciò posto, se la linea AMB non è minore di tutte quelle che la circondano, esisterà fra queste ultime una linea più corta di tutte le altre, la quale sarà minore di AMB, o tutto al più eguale ad AMB Sia ACDEB questa linea circondante; fra le due linee conducasi, ove si vorrà, la retta PQ che non incontri la linea AMB, o al più che la tocchi; la retta PQ è minore di PCDEQ; dunque se alla parte PCDEQ si sostituisca la linea retta PQ, si avrà la linea circondante APQB minore di APDQB. Ma, per supposizione, questa doveva essere la più corta di tutte; dunque questa supposizione non può sussistere; quindi tutte le linee circondanti sono più lunghe di AMB.

*Scolio.* Si dimostrerà assolutamente in simil modo che una linea convessa e rientrante in sè stessa AMB ( *fig. 163* ) è più corta di qualunque linea che la circonderebbe da ogni parte, sia che la circondante FHG tocca AMB in uno o più punti, sia che la circonda senza toccarla. Fig. 163.

## PROPOSIZIONE X.

### LEMMA.

*Essendo date due circonferenze concentriche, si può sempre iscrivere nella maggiore un poligono regolare i cui lati non incontrino la minore, e si può ancora circoscrivere alla minore un poligono regolare i cui lati non incontrino la maggiore; di maniera che in ambidue i casi i lati del poligono descritto saranno racchiusi fra le due circonferenze.*

Fig. 164. Siano date le due circonferenze FBG, IAH (*fig.* 164) concentriche; dico che si può iscrivere nella maggiore FBG un poligono regolare i cui lati non incontrino la minore IAH; e di più si può circoscrivere alla minore IAH un poligono regolare i cui lati non incontrino la maggiore; ed in modo che sempre i lati del poligono descritto trovansi racchiusi fra le due circonferenze FBG, IAH.

Siano CA, CB i raggi delle due circonferenze; pel punto A tirisi la tangente DE, terminata alla circonferenza maggiore in D ed in E; iscrivasi nella circonferenza maggiore un poligono regolare; per i problemi precedenti; dividansi quindi gli archi sottesi dai lati in due parti eguali, e conducansi le corde dei semi-archi; si avrà un poligono regolare di un numero doppio di lato. Continuisi la bisezione degli archi finchè si pervenga ad un arco minore di DBE. Sia MBN questo arco (il cui punto di mezzo è supposto B); è chiaro che la corda MN sarà più lontana dal centro che DE, e che il poligono regolare che à per lato MN, non può incontrare la circonferenza che à per raggio CA.

Poste le cose stesse, tirinsi CM, CN che incontrino la tangente DE in P e Q; sarà PQ il lato di un poligono circoscritto alla circonferenza minore, simile al poligono iscritto nella maggiore, il cui lato è MN. Ora è chiaro che il poligono circoscritto che à per lato PQ, non può incontrare la circonferenza maggiore, poichè CP è minore di CM.

Dunque, per la stessa costruzione, si può descrivere un poligono regolare iscritto nella circonferenza maggiore, ed un poligono simile circoscritto alla minore, i quali avranno i loro lati compresi fra le due circonferenze.

*Scolio*. Se si ànno due settori concentrici FCG, ICH, si potrà similmente iscrivere nel maggiore una *porzione di poligono regolare*, o circoscrivere al minore una porzione di poligono simile, tali che i contorni dei due poligoni siano compresi fra gli archi delle due circonferenze; basterà dividere l'arco FBG successivamente in 2, 4, 8, 16 etc. parti eguali, finchè si arrivi ad una parte minore di DBE.

Si chiama qui *porzione di poligono regolare* la figura terminata da una serie di corde eguali iscritte nell' arco FG da una estremità all' altra. Questa porzione à le proprietà principali dei poligoni regolari; essa à gli angoli eguali ed i lati eguali, ed è ad un tempo stesso iscrittibile e circoscrittibile al circolo. Intanto essa non farebbe parte di un poligono regolare propriamente detto, se l'arco sotteso da uno dei suoi lati non fosse una parte aliquota della circonferenza.

## PROPOSIZIONE XI.

### TEOREMA.

***Le circonferenze dei circoli stanno fra loro come i raggi, e le loro superficie come i quadrati dei medesimi raggi.***

S' indicherà, per brevità, con *circ*. CA (*fig. 165*) Fig. 165. la circonferenza che à per raggio CA; dico che si avrà

*circ*. CA : *circ*. OB :: CA : OB.

Poichè se questa proporzione non à luogo, CA starà ad OB come *circ*. CA sta ad un quarto termine maggiore o minore di *circ*. OB; supponghasi che sia minore, e sia, s' è possibile,

CA : OB :: *circ*. CA : *circ*. OD.

Iscrivasi nella circonferenza, il cui raggio è BO, un poligono regolare EFGKLE, i cui lati non incontrino la circonferenza, della quale OD è il raggio (*Prop. 10*); iscrivasi un poligono simile MNPSTM nella circonferenza il cui raggio è CA.

Ciò posto, poichè questi poligoni sono simili, i loro perimetri MNPSM, EFGKE stanno fra loro come i raggi CA, OB dei circoli circoscritti (*Prop. 8*), e si avrà

MNPSTM : EFGKLE :: CA OB ;

ma, per ipotesi,

CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD ;

dunque

MNPSTM : EFGKLE :: *circ.* CA : *circ.* OD.

Ora questa proporzione è impossibile, perchè il contorno MNPSTM è minore di *circ.* CA ( *Prop. 9* ) ; ed al contrario EFGKLE è maggiore di *circ.* OD ; dunque è impossibile che CA stia ad OB come *circ.* CA sta ad una circonferenza minore di *circ.* OB ; ovvero, in termini generali, è impossibile che un raggio stia ad un raggio come la circonferenza descritta col primo raggio sta ad una circonferenza minore della circonferenza descritta col secondo raggio.

Da ciò si conchiude che non può essere che CA stia ad OB come *circ.* CA sta ad una circonferenza maggiore di *circ.* OB; poichè, se ciò fosse, rovesciando i rapporti, OB starebbe ad AC come una circonferenza maggiore di *circ.* OB sta a *circ.* CA, o, il che è lo stesso, come *circ.* OB sta ad una circonferenza minore di *circ.* CA; dunque un raggio starebbe ad un raggio come la circonferenza descritta col primo raggio sta ad una circonferenza minore della circonferenza descritta col secondo raggio; ciò che è stato dimostrato impossibile.

Poichè il quarto termine della proporzione

CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OB ,

non può essere nè maggiore nè minore di *circ.* OB, bisogna che sia eguale a *circ.* OB; dunque le circonferenze dei circoli stanno fra loro come i raggi.

Un ragionamento ed una costruzione intieramente simili serviranno a dimostrare che le superficie dei circoli stanno come i quadrati dei loro raggi. Quindi *le circonferenze* etc. C. B. D.

Non entreremo ad esaminare altri particolari su questa proposizione, che d' altronde è un corollario della seguente.

Fig. 166 *Corollario.* Gli archi simili AB, DE ( *fig. 166* ) stanno come i raggi AC, OD, ed i settori simili ACB, DOE stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.

Infatti, poichè gli archi sono simili, l'angolo C è eguale all'angolo O ( *Def. 3, lib. III* ) ; ora l'angolo C sta a

quattro angoli retti come l'arco AB sta alla circonferenza intiera descritta col raggio AC ( *Prop. 17, lib. II* ); e l'angolo O sta a quattro angoli retti come l'arco DE sta alla circonferenza descritta col raggio OD; dunque gli archi AB, DE stanno fra loro come le circonferenze, di cui fanno parte; queste circonferenze stanno come i raggi AC, DO; dunque

*arco* AB : *arco* DE :: AC : DO.

Per la medesima ragione, i settori ACB, DOE stanno come i circoli interi; questi stanno come i quadrati dei raggi; dunque

$$set.\ ACD : set.\ DOE :: \overline{AC}^2 : \overline{DO}^2.$$

## PROPOSIZIONE XII.

### TEOREMA.

*L'arco del circolo è eguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio.*

Indicheremo con *sup.* CA ( *fig. 167* ) la superficie del circolo, il cui raggio è CA; dico che si avrà

Fig. 167.

$$circ.\ CA \times \frac{1}{2}\ CA = sup.\ CA.$$

Infatti se la metà di CA moltiplicata per la circonferenza descritta col raggio CA non è l'area del circolo il cui raggio è CA, questa quantità sarà la misura di un cerchio maggiore o minore. Suppongasi primieramente che essa sia la misura di un circolo maggiore, e sia, s'è possibile, la metà di CA moltiplicata per *circ.* CA eguale a *sup.* CB.

Al circolo, il cui raggio è CA, circoscrivasi un poligono regolare DEFG etc., i cui lati non incontrino la circonferenza che à per raggio CB ( *Prop. 10* ), la superficie di questo poligono sarà eguale al suo contorno DE più EF più FG etc. moltiplicato per la metà di AC ( *Prop. 7* ): ma il contorno del poligono è maggiore della circonferenza iscritta, poichè la circonda da tutte le parti; dunque la superficie del poligono DEFG etc. è maggiore della metà di CA moltiplicata per *circ.* AC, che per ipotesi è misura del circolo, il cui raggio è CB; dunque il poligono sarebbe maggiore del circolo. Ora al contrario è

minore, poichè vi è contenuto; dunque è impossibile che la metà di CA moltiplicata per *circ.* CA sia maggiore di *sup.* CA, ovvero in altri termini, è impossibile che la circonferenza di un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura di un circolo maggiore.

Dico in secondo luogo che il medesimo prodotto non può essere la misura di un cerchio minore: e per non cambiar figura, supporremo che trattisi del circolo il cui raggio è CB; bisogna dunque provare che la metà di CB moltiplicata per *circ.* CB non può essere la misura di un circolo minore, per esempio del circolo il cui raggio è CA. Infatti sia, s'è possibile, la metà di AB moltiplicata per *circ.* CB eguale a *sup.* CA.

Avendo fatto la stessa costruzione di prima, la superficie del poligono DEFG etc. avrà per misura la somma DE più EF più FG etc. moltiplicata per la metà di CA: ma il contorno DE più EF più FG etc. è minore di *circ.* CB che lo circonda da tutte le parti; dunque l'area del poligono è minore della metà di CA moltiplicata per *circ.* CB, e con più ragione minore della metà di CB moltiplicata per *circ.* CB. Quest'ultima quantità è, per ipotesi, la misura del circolo, di cui CA è raggio; dunque il poligono sarebbe minore del circolo iscritto; dunque è impossibile che la circonferenza di un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura di un circolo minore.

*Dunque finalmente la circonferenza di un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio è la misura dell' area di questo medesimo circolo.* C. B. D.

*Corollario I.* La superficie di un settore è eguale all' arco di questo settore moltiplicato per la metà del suo raggio.

Fig. 168. Infatti il settore ACB (*fig. 168*) sta al circolo intero come l'arco AMB sta alla circonferenza intera ABD (*Prop. 17, lib. II*), o come AMB moltiplicato per la metà di AC sta ad ABD moltiplicata per la metà di AC: ma il circolo intero è eguale ad ABD moltiplicata per la metà di AC; dunque il settore ACB à per misura AMB moltiplicato per la metà di AC.

*Corollario II.* Chiamiamo $\pi$ la circonferenza il cui diametro è l' unità; poichè le circonferenze stanno come i raggi o come i diametri, si potrà far questa proporzione: il diametro 1 sta alla sua circonferenza $\pi$ co-
Fig. 165. me il diametro 2CA (*fig. 165*) sta alla circonferenza che à per raggio CA; di maniera che si avrà

$$1 : \pi :: 2CA : circ.\ CA;$$

dunque *circ.* CA è eguale a $\pi$ moltiplicato per 2CA. Moltiplicando da ambe le parti per $\frac{1}{2}$ CA, si avrà $\frac{1}{2}$ CA moltiplicato per *circ.* CA eguale a $\pi$ moltiplicato per 2CA e moltiplicato per $\frac{1}{2}$ CA, eguale a $\pi\overline{CA}^2$, o *sup.*CA eguale a $\pi\overline{CA}^2$; dunque *la superficie di un circolo è eguale al prodotto del quadrato del suo raggio moltiplicato pel numero costante $\pi$ che rappresenta la circonferenza, il cui diametro è 1, od il rapporto della circonferenza al diametro.*

Similmente la superficie del circolo che à per raggio OB sarà eguale a $\pi$ moltiplicato per $\overline{OB}^2$; ora

$$\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{OB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2;$$

dunque *la superficie dei circoli stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi*; ciò si accorda col precedente teorema.

*Scolio.* Si è già detto che il problema della quadratura del circolo consiste in trovare un quadrato eguale in superficie ad un circolo, il cui raggio è cognito; ora si è provato che il circolo è equivalente al rettangolo fatto sulla circonferenza e la metà del raggio, e questo rettangolo si cangia in quadrato prendendo una media proporzionale fra le due sue dimensioni (*Prob.* 6, *lib. III*); così il problema della quadratura del circolo si riduce a trovare la circonferenza quando si conosce il raggio, e per questo basta conoscere il rapporto della circonferenza al raggio od al diametro.

Finora non si è potuto determinare questo rapporto se non che in una maniera prossima al vero: ma l'approssimazione è stata portata sì lungi, che la conoscenza del rapporto esatto non avrebbe alcun vantaggio reale sopra quella del rapporto approssimativo. Perciò questa quistione che à occupato i geometri, allorchè i metodi di approssimazione erano meno conosciuti, è presentemente riposta fra le ricerche oziose, di cui non è permesso d'occuparsi se non a coloro che ànno appena le prime nozioni di geometria.

*Archimede* à provato che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$: così $3\frac{1}{7}$

o $\frac{22}{7}$ à un valore di già molto prossimo al numero che si è rappresentato con $\pi$; e questa prima approssimazione è molto in uso per la sua semplicità. *Mezio* à trovato pel medesimo numero il valore molto più approssimato $\frac{355}{113}$. Finalmente il valore di $\pi$, sviluppato fino ad un certo ordine di decimali, è stato trovato da altri calcolatori 3, 14159265358979 32 etc., e si è avuta la pazienza di continuare questi decimali sino alla centoventisettesima, e parimente sino alla centoquarantesima. È chiaro che una tale approssimazione quasi equivale alla verità, e che non si conoscono meglio le radici delle potenze imperfette.

Si spiegheranno, nei problemi seguenti, due metodi elementari più semplici per ottenere queste approssimazioni.

## PROPOSIZIONE XIII.

### PROBLEMA.

*Essendo date le superficie di un poligono regolare iscritto e di un poligono simile circoscritto, trovare la superficie dei poligoni regolari iscritto e circoscritto di un doppio numero di lati.*

Siano date le due superficie di due poligoni regolari iscritto e circoscritto, e sia AB (*fig. 169*) il lato del poligono dato iscritto, EF parallelo ad AB, quello del poligono simile circoscritto, C il centro del circolo; fa d' uopo trovare le superficie dei poligoni regolari iscritto e circoscritto di un doppio numero di lati.

Fig. 169

Se si tirino la corda AM e le tangenti AP, QB, la corda AM sarà il lato del poligono iscritto di un numero di lati doppio, e PQ doppio di PM sarà quello del poligono simile circoscritto (*Prop. 6*). Ciò posto, come la medesima costruzione à luogo nei differenti angoli eguali ad ACM, basta considerare solo l'angolo ACM, ed i triangoli che vi sono contenuti staranno fra loro come i poligoni interi. Sia A la superficie del poligono iscritto, di cui AB è un lato, B la superficie del poligono simile circoscritto, A′ la superficie del poligono, di cui AM è un lato, B′ la superficie del poligono

simile circoscritto. A e B sono cogniti; si tratta di trovare A′, B′.

1.° I triangoli ACD, ACM, che ànno comune il vertice A, stanno fra loro come le rispettive basi CD, CM: d' altronde questi triangoli stanno come i poligoni A ed A′, di cui fanno parte; dunque

$$A : A' :: CD : CM.$$

I triangoli CAM, CME, il cui vertice comune è M, sono fra loro come le rispettive basi CA, CE; questi medesimi triangoli stanno come i poligoni A′ e B, di cui fanno parte; dunque

$$A' : B :: CA : CE.$$

Ma per le parallele AD, ME, si à

$$CD : CM :: CA : CE;$$

dunque paragonando le proporzioni, si avrà

$$A : A' :: A' : B;$$

dunque il poligono A′, uno di quelli che si cercano, è medio proporzionale fra i due poligoni cogniti A e B; e si à per conseguenza $A' = \sqrt{A \times B}$.

2.° Per l' altezza comune CM, il triangolo CPM sta al triangolo CPE come PM sta a PE; ma la linea CP dividendo in due parti eguali l'angolo MCE, si à (*Prop. 17, lib. III*)

$$PM : PE :: CM : CE :: CD : CA :: A : A';$$

dunque

$$CPM : CPE :: A : A',$$

e per conseguenza

$$CPM : CPM + CPE :: A : A + A'.$$

Ma CMPA o 2CMP, e CME stanno fra loro come i poligoni B′ e B, di cui fanno parte; dunque

$$B' : B :: 2A : A \times A'.$$

Si è di già determinato A′: questa nuova proporzione determinerà B′, e si avrà

$$B' = \frac{2A + B}{A + A'}:$$

dunque *col mezzo dei poligoni A e B si sono trovati i poligoni A′ e B′ che hanno un doppio numero di lati.* C. B. F.

## PROPOSIZIONE XIV.

### PROBLEMA.

*Trovare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.*

Sia il raggio del cerchio eguale ad 1, il lato del quadrato iscritto sarà $\sqrt{2}$ (*Prop.3*); quello del quadrato circoscritto sarà eguale al diametro 2; dunque la superficie del quadrato iscritto è eguale a 2, e quella del quadrato circoscritto eguale a 4. Adesso, se si fa $A=2$, e $B=4$, si troverà pel problema precedente l'ottagono iscritto $A'=\sqrt{8}=2,8284271$, e l'ottagono circoscritto $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=3,3137085$. Conoscendo così gli ottagoni iscritto e circoscritto, si troveranno col loro mezzo i poligoni di un doppio numero di lati; bisognerà di nuovo supporre $A=2,8284271$, e $B=3,3137085$, e si avrà $A'=\sqrt{A\times B}=3,0614674$, e $B'=\frac{2A+B}{A+A'}=3,1825979$.

In seguito questi poligoni di 16 lati serviranno per far conoscere quelli di 32, e si continuerà così finchè il calcolo non dia più differenza fra i poligoni iscritto e circoscritto, almeno nelle cifre decimali, a cui ci siamo fermati, che è la settima in questo esempio. Arrivato a questo punto si conchiuderà che il cerchio è eguale all' ultimo resultamento, perchè il cerchio dev' essere sempre compreso fra il poligono iscritto ed il circoscritto; dunque se questi non differiscono fra di loro fino ad un cert'ordine di decimali, il circolo pure ne differirà fino allo stesso ordine.

Ecco il calcolo dei poligoni prolungato finchè non differiscono più nel settimo ordine di decimali.

| Numero dei lati | Poligono iscritto | Poligono circoscritto |
|---|---|---|
| 4 | 2,0000000 | 4,0000000 |
| 8 | 2,8284271 | 3,3137085 |
| 16 | 3,0614674 | 3,1825979 |
| 32 | 3,1214451 | 3,1517249 |
| 64 | 3,1365485 | 3,1441184 |
| 128 | 3,1403311 | 3,1422236 |
| 256 | 3,1412772 | 3,1417504 |
| 512 | 3,1415138 | 3,1416321 |
| 1024 | 3,1415729 | 3,1416025 |
| 2048 | 3,1415877 | 3,1415951 |
| 4096 | 3,1415914 | 3,1415933 |
| 8192 | 3,1415923 | 3,1415928 |
| 16384 | 3,1415925 | 3,1415927 |
| 32768 | 3,1415926 | 3,1415926 |

Da ciò si conchiude che la superficie del circolo è eguale a 3,1415926. Si potrebbe avere del dubbio sull' ultima decimale per gli errori prodotti dalle parti tralasciate; ma il calcolo è stato fatto con una decimale di più, per essere certi del resultato che si è trovato sino all' ultimo decimale.

Poichè la superficie del circolo è eguale alla mezza circonferenza moltiplicata pel raggio, essendo il raggio eguale ad 1, la mezza circonferenza è 3,1415926; ovvero il diametro essendo 1, la circonferenza è 3, 1415926; dunque *il rapporto della circonferenza al diametro disegnato di sopra con $\pi$ è eguale a 3,1415926.* C. B. F.

## PROPOSIZIONE XV.

### LEMMA.

*Il triangolo CAB ( fig. 170 ) è equivalente al triangolo isoscele DCE, che à il medesimo angolo C, ed il lato CE eguale a CD è medio proporzionale tra CA e CB. Di più se l' angolo CAB è retto, la perpendicolare CF abbassata sopra la base del triangolo isoscele, sarà media proporzionale tra il lato CA e la semisomma dei lati CA, CB.* Fig. 170.

1.° Poichè, per l'angolo comune C il triangolo ABC sta al triangolo isoscele DCE come AC moltiplicato per CE sta a DC moltiplicato per CE, o $\overline{DC}^2$ ( *Prop. 21, lib. III* )

dunque questi triangoli saranno equivalenti, se il quadrato di DC è eguale a CB moltiplicato per AC, o se DC è media proporzionale tra AC e CB.

2.° La perpendicolare CGF dividendo in due parti eguali l'angolo ACB, si à ( *Prop. 17, lib. III* )

$$AG : GB :: AC : CB,$$

donde ne resulta, *componendo*,

$$AG : AG + GB \text{ o } AB :: AC : AC + CB :$$

ma AG sta ad AB come il triangolo ACG sta al triangolo ACB o 2CDF: d'altronde, se l'angolo A è retto, i triangoli rettangoli ACG, CDF saranno simili, e daranno

$$ACG : CDF :: \overline{AC}^2 : \overline{CF}^2;$$

dunque

$$\overline{AC}^2 : 2\,\overline{CF}^2 :: AC : AC + CB.$$

Moltiplicando il secondo rapporto per AC, gli antecedenti diverranno eguali, e si avrà per conseguenza

$$2\,\overline{CF}^2 = AC \times [\,AC + CB\,], \text{ o } \overline{CF}^2 = AC \times \left\{\frac{AC+CB}{2}\right\}$$

dunque 2.° se l'angolo A è retto, la perpendicolare CF sarà media proporzionale tra il lato AC e la semisomma dei lati AC, CB.

## PROPOSIZIONE XVI.

### PROBLEMA.

*Trovare un cerchio che differisca tanto poco quanto si vorrà da un poligono regolare dato.*

Sia proposto, per esempio, il quadrato BMNP ( *fig.* Fig 171. *171* ); fa d' uopo trovare un cerchio che differisca da questo quadrato tanto poco quanto si vorrà.

Abbassisi dal centro C la perpendicolare CA sopra il lato MB, e congiungasi CB.

Il cerchio descritto col raggio CA è iscritto nel quadrato, ed il cerchio descritto col raggio CB è circoscritto a questo stesso quadrato; il primo sarà minore del

quadrato, maggiore ne sarà il secondo; ma si tratta di restringere questi limiti.

Prendasi CD e CE eguali ciascuna alla media proporzionale tra CA e CB, e tirisi ED; il triangolo isoscele CDE sarà equivalente al triangolo CAB (*Prop. 15*); facciasi lo stesso per ciascuno degli otto triangoli che compongono il quadrato, e formerete così un ottagono regolare equivalente al quadrato BMNP. Il circolo descritto col raggio CF, medio proporzionale fra CA e $\frac{CA + CB}{2}$, sarà iscritto nell' ottagono, ed il cerchio descritto col raggio CD gli sarà circoscritto. Laonde il primo sarà minore del quadrato dato, ed il secondo maggiore.

Se si cangia nella medesima maniera il triangolo CDF in un triangolo isoscele equivalente, si formerà con tal mezzo un poligono regolare di sedici lati equivalente al quadrato proposto. Il circolo iscritto in questo poligono sarà minore del quadrato, ed il circolo circoscritto sarà maggiore.

Si può continuare così finchè il rapporto tra il raggio del circolo circoscritto differisca tanto poco quanto si vorrà dall' eguaglianza. Allora l' uno e l' altro circolo potranno essere riguardati come equivalenti al quadrato proposto. Quindi *si è trovato* etc. C. B. F.

*Scolio.* Ecco a che si riduce la ricerca dei raggi consecutivi. Sia $a$ il raggio del cerchio iscritto in uno dei poligoni trovati, $b$ il raggio del cerchio circoscritto al medesimo poligono; siano $a'$, $b'$ i raggi simili del poligono seguente che à un numero di lati doppio, secondo ciò che noi abbiamo dimostrato, $b'$ è una media proporzionale fra $a$ e $b'$, ed $a'$ è una media proporzionale fra $a$ ed $\frac{a + b}{2}$; di maniera che si avrà $b' = \sqrt{a \times b}$ ed $a' = \sqrt{a \times \frac{a \times b}{2}}$; dunque essendo cogniti i raggi $a$ e $b$ di un poligono, se ne dedurranno facilmente i raggi $a'$ e $b'$ del poligono seguente, e si continuerà così finchè la differenza fra i due raggi sia divenuta insensibile; allora o l' uno o l' altro di questi raggi sarà il raggio del cerchio equivalente al quadrato od al poligono proposto.

Questo metodo è facile a praticarsi in linee, poichè si riduce a trovare medie proporzionali successive fra linee cognite: ma riesce assai meglio in numeri, ed è uno dei mezzi più comodi che la geometria elementare possa offrire per trovare prontamente il rapporto approssimativo della circonfereuza al diametro. Sia il lato del quadrato eguale a 2, il primo raggio iscritto CA sarà 1, ed il

primo raggio circoscritto CB sarà $\sqrt{2}$, ovvero 1,4142136. Facendo dunque $a = 1$, $b = 1,4142136$, si troverà $b' = 1,1892071$, ed $a' = 1,0986841$. Questi numeri serviranno a calcolare i seguenti, secondo la legge data di continuazione.

Ecco il resultato del calcolo fatto sino a sette od otto cifre colle tavole dei logaritmi ordinari.

| *Raggi dei circoli circoscritti* | | *Raggi dei circoli iscritti* |
|---|---|---|
| 1,4142136 | . . . . . | 1,0000000 |
| 1,1892071 | . . . . . | 1,0986841 |
| 1,1430500 | . . . . . | 1,1210863 |
| 1,1320149 | . . . . . | 1,1265639 |
| 1,1292862 | . . . . . | 1,1279257 |
| 1,1286063 | . . . . . | 1,1282657. |

Adesso che la prima metà delle cifre è la stessa da ambe le parti, si potrà, in vece dei medî geometrici, prendere i medî aritmetici che ne differiscono soltanto nelle decimali ulteriori. Di questa maniera l' operazione si abbrevia molto, ed i resultati sono:

| | | |
|---|---|---|
| 1,1284360 | . . . . . | 1,1283508 |
| 1,1283934 | . . . . . | 1,1283721 |
| 1,1283827 | . . . . . | 1,1288774 |
| 1,1283801 | . . . . . | 1,1283787 |
| 1,1283704 | . . . . . | 1,1283791 |
| 1,1283792 | . . . . . | 1,1283792. |

Dunque 1,1283792 è molto prossimamente il vero raggio del circolo eguale in superficie al quadrato il cui lato è 2. Da ciò è facile trovare il rapporto della circonferenza al diametro; poichè si è dimostrato che la superficie del circolo è eguale al quadrato del suo raggio moltiplicato pel numero $\pi$: dunque se dividasi la superficie 4 per il quadrato di 1,1283792, si avrà il valore di $\pi$ che si trova per questo calcolo essere 3,1415926 etc. come si era trovato con altro metodo.

# APPENDICE

## AL LIBRO QUARTO

### DEFINIZIONI

I. Si chiama *massimo* la quantità maggiore fra tutte quelle della medesima specie; *minimo* la minore.

Così il diametro di un circolo è un *massimo* fra tutte le linee rette che congiungono due punti della circonferenza; e la perpendicolare è un *minimo* fra tutte le rette condotte da un punto dato ad una linea data.

II. Si chiamano figure *isoperimetre* (*a*) quelle che ànno i perimetri eguali.

### PROPOSIZIONE PRIMA.

#### TEOREMA.

*Fra tutti i triangoli della stessa base e dello stesso perimetro, il triangolo* massimo *è quello nel quale i due lati non determinati sono eguali.*

Sia AC eguale a CB ( *fig. 172* ), ed AM più MB eguale ad AC più CB; dico che il triangolo isoscele ACB è maggiore del triangolo AMB che à la medesima base e lo stesso perimetro. Fig. 172.

Dal punto C come centro, e col raggio CA eguale a CB descrivasi una circonferenza che incontri CA prolungata in D; tirisi DB; l' angolo DBA iscritto nel semicerchio sarà un angolo retto ( *Prop. 18*, *Corol. 2*, *lib. II* ). Prolunghisi la perpendicolare DB verso N; facciasi MN eguale ad MB, e congiungasi AN; finalmente dai punti M, C abbassinsi le perpendicolari MP, CG sopra DN.

Poichè CB è eguale a CD, ed MN ad MB, si à AC più

(a) Isoperimetro, da ἴσος ( *isos* ) *eguale*, e da περίμετρον ( *perimetron* ) *circonferenza*. ( Il Trad. ).

CB eguale ad AD ed AM; più MB eguale ad AM più MN. Ma AC più CB è eguale ad AM più MB; dunque AD è eguale ad AM più MN; dunque AD è maggiore di AN. Ora se l'obbliqua AD è maggiore dell'obbliqua AN, essa dev' essere più lontana dalla perpendicolare; dunque DB è maggiore di BN; dunque BG che è metà di BD (*Scolio Prop. 12, lib. I*) sarà maggiore di BP metà di BN. Ma i triangoli ABC, ABM che ànno la stessa base AB stanno fra loro come le altezze respettive BG, BP; dunque essendo BG maggiore di BP, il triangolo isoscele ABC è maggiore del non isoscele ABM della medesima base e dello stesso perimetro.

Quindi *fra tutti i triangoli* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE II.

### TEOREMA.

***Di tutti i poligoni isoperimetri di un medesimo numero di lati, quello che è un* massimo *à i suoi lati eguali.***

Fig. 173. Sia ABCDEF (*fig. 173*) il poligono *massimo*; dico che avrà i suoi lati eguali.

Se il lato BC non è eguale a CD, facciasi sopra la base BD un triangolo isoscele BOD che sia isoperimetro a BCD; il triangolo BOD sarà maggiore di BCD (*Prop. 1*), e per conseguenza il poligono ABODEF sarà maggiore di ABCDEF; dunque quest' ultimo non sarebbe il *massimo* fra tutti quelli che ànno lo stesso perimetro, ed il medesimo numero di lati; ciò che è contro la supposizione. Dunque si deve avere BC eguale a DE eguale ad EF etc.; dunque *tutti i lati di un poligono* massimo *sono eguali fra loro*. C. B. D.

## PROPOSIZIONE III.

### TEOREMA.

***Di tutti i triangoli formati con due lati facendo un angolo a piacimento, il* massimo *è quello in cui i due lati dati formano un angolo retto.***

Fig. 174. Siano i due triangoli BAC, BAD (*fig. 174*) che ànno il lato AB comune ed il lato AC eguale ad AD; se l'angolo BAC è retto, dico che il triangolo BAC è maggiore di BAD, nel quale l'angolo A è acuto od ottuso.

Infatti, avendo la stessa base AB, i due triangoli BAC, BAD stanno come le altezze AC, DE: ma la perpendicolare DE è minore dell' obbliqua AD, o della sua eguale AC; dunque il triangolo BAC è maggiore di BAD. Dunque *di tutti i triangoli* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IV.

### TEOREMA.

***Di tutti i poligoni formati con lati dati ed un ultimo a piacimento, il massimo dev' esser tale che tutti i suoi angoli siano iscritti in una mezza circonferenza, della quale il lato incognito sia il diametro.***

Sia ABCDEF (*fig. 175*) il *massimo* dei poligoni formati coi lati dati AB, BC, CD, DE, EF ed un ultimo AF; dico che gli angoli A, B, C, D, E, F sono iscritti in una mezza circonferenza, ed il lato AF essere il diametro. Fig. 175.

Tirinsi le diagonali AD, DF. Se l' angolo ADF non fosse retto, potrebbe, conservando le parti ABCD, DEF tali quali sono, aumentare il triangolo ADF, e per conseguenza il poligono intero, rendendo l' angolo ADF retto conformemente alla proposizione precedente: ma questo poligono non può essere aumentato di più, poichè si suppone giusto al suo *massimo*; dunque l' angolo ADF è già un angolo retto. Lo stesso è degli angoli ABF, ACF, AEF; dunque *tutti gli angoli A, B, C, D, E, F del poligono* massimo *sono iscritti in una mezza circonferenza, della quale il lato indeterminato AF è il diametro*. C. B. D.

*Scolio*. Questa proposizione dà luogo ad una quistione; cioè, se vi siano più maniere di formare un poligono con lati dati ed un ultimo incognito, che sarà il diametro della mezza circonferenza, nella quale gli altri lati sono iscritti. Prima di decidere questa quistione bisogna osservare che se una stessa corda AB (*fig. 176*) sottende archi descritti con differenti raggi AC, AD, l'angolo al centro appoggiato sopra questa corda sarà minore nel circolo il cui raggio è maggiore; così ACB è minore di ADB. Infatti l'angolo ADO è eguale ad ACD più CAD (*Prop. 19, lib. I*); dunque ACD è minore di ADO, e raddoppiando da una parte e dall' altra, si avrà ACB minore di ADB. Fig. 176.

## PROPOSIZIONE V.

### TEOREMA.

*Non vi è che una sola maniera di formare un poligono con lati dati ed un ultimo incognito che sia il diametro della semicirconferenza, nella quale sono iscritti gli altri lati.*

Poichè, supponiamo che siasi trovato un cerchio, che soddisfaccia alla quistione; se si prenda un cerchio maggiore, le corde AC, BC, CP etc. (*fig. 175*) corrisponderanno ad angoli al centro minori. La somma di questi angoli al centro sarà dunque minore di due angoli retti; così le estremità dei lati dati non termineranno più alle estremità di un diametro. L'inconveniente contrario avrà luogo se si prenda un cerchio minore; dunque il poligono di cui trattasi non può essere iscritto che in un solo circolo.

Fig. 175

Dunque *non vi è che* etc. C. B. D.

*Scolio*. Si può cangiare a piacimento l'ordine dei lati AB, BC, CD etc. ed il diametro del cerchio circoscritto sarà sempre lo stesso, come pure la superficie del poligono, perchè qualunque sia l'ordine degli archi AB, BC, CD etc. basta che la somma loro faccia la semicirconferenza, ed il poligono avrà sempre la stessa superficie, poichè sarà eguale al semicerchio, meno i segmenti AB, BC, etc. la somma dei quali è sempre la stessa.

## PROPOSIZIONE VI.

### TEOREMA.

*Di tutti i poligoni formati con lati dati, il massimo è quello che può iscriversi in un cerchio.*

Fig. 177.

Sia ABCDEFG (*fig. 177*) il poligono iscritto, ed *abcdefg* il non iscrittibile formato con lati eguali, talmente che sia AB eguale ad *ab*, BC eguale a *bc* etc.; dico che il poligono iscritto è maggiore dell' altro.

Tirisi il diametro EM; congiungansi AM, MB; sopra *ab* eguale ad AB facciasi il triangolo *abm* eguale ad ABM, e congiungasi *em*.

In virtù della proposizione IV, il poligono EFGAM è maggiore di *efgam*, a meno che questo non possa essere

similmente iscritto in una semicirconferenza, della quale il lato *em* sarebbe il diametro; nel quale caso i due poligoni sarebbero eguali in virtù della proposizione V. Per la stessa ragione il poligono EDCBM è maggiore di *edcbm*, salvo la medesima eccezione in cui vi sarebbe eguaglianza. Dunque il poligono intero EFGAMBCDE è maggiore di *efgambcde*, a meno che non siano interamente eguali: ma essi non lo sono, poichè l'uno è iscritto nel circolo e l'altro è supposto non iscrittibile; dunque il poligono iscritto è il maggiore. Togliendo da ambe le parti i triangoli eguali ABM, *abm*, resterà il poligono iscritto ABCDEFG maggiore del non iscrittibile *abcdefg*. Quindi *di tutti i poligoni* etc. C. B. D.

*Scolio*. Si dimostrerà come nella V proposizione, che non può esservi che un sol circolo, e per conseguenza che un sol poligono *massimo* che soddisfaccia alla quistione; e questo poligono sarebbe ancora della medesima superficie in qualunque modo si cangiasse l'ordine dei suoi lati.

## PROPOSIZIONE VII.

### TEOREMA.

*Il poligono regolare è un* massimo *fra tutti i poligoni isosceli e di un medesimo numero di lati.*

Infatti, secondo il teorema II, il poligono *massimo* à tutti i suoi lati eguali; e, secondo il teorema precedente, è iscrittibile nel circolo; dunque questo poligono è regolare. Quindi *il poligono regolare* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE VIII.

### LEMMA.

*Due angoli al centro, misurati in due circoli differenti, stanno fra loro come gli archi compresi divisi per i loro raggi.*

Siano gli angoli C ed O (*fig. 178*) misurati in due circoli differenti; dico che sta l'angolo C all'angolo O come il rapporto AB diviso per AC sta al rapporto DE diviso per DO. Fig. 178.

Con un raggio OF eguale ad AC descrivasi l'arco FG compreso fra i lati OD, OE, prolungati per i raggi eguali AC, CF; si avrà (*Prop. 17, lib. II*)

$$C : O :: AB : FG$$

ovvero $C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{OF}$.

Ma ( *Prop. 11* ) per gli archi simili FG, DE si à

$$FG : DE :: FO : DO;$$

dunque il rapporto FG diviso per OF è eguale al rapporto DE diviso per DO, e si à per conseguenza

$$C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$$

Quindi *due angoli* etc. C. B. D.

## PROPOSIZIONE IX.

### TEOREMA.

*Di due poligoni regolari isoperimetri, quello che à un maggior numero di lati è il maggiore.*

Fig. 179. Sia DE ( *fig. 179* ) il mezzo lato di uno dei poligoni, O il suo centro, OE l'apotema. Sia AB il mezzo lato dell'altro poligono, C il suo centro, CB l'apotema. Suppongansi i centri C ed O situati ad una distanza qualunque OC, e le apoteme OE, CB nella direzione OC; così DOE ed ACB saranno le metà degli angoli al centro dei poligoni; e come questi angoli non sono eguali, le linee CA, OD prolungate s' incontreranno in un punto F; da questo punto abbassisi sopra OC la perpendicolare FG; dai punti O, C, come centri, descrivansi gli archi GI, GH, terminati ai lati OF, CF.

Posto ciò, si avrà pel lemma precedente

$$O : C :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG};$$

ma DE sta al perimetro del primo poligono come l'angolo O sta a quattro angoli retti, ed AB sta al perimetro del secondo come l'angolo C sta a quattro angoli retti; dunque, poichè i perimetri dei poligoni sono eguali,

$$DE : AB :: O : C,$$

ovvero $DE : AB :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$.

Moltiplicando gli antecedenti per OG ed i conseguenti per CG, si avrà

$$DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH.$$

Ma i triangoli simili ODE, OFG, danno

$$OE : OG :: DE : FG;$$

donde resulta

$$DE \times OG = OE \times FG;$$

si avrà similmente

$$AB \times CG = CB \times FG;$$

dunque

$$OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH,$$

ovvero

$$OE : CB :: GI : GH.$$

Se dunque dimostrasi che l'arco GI è maggiore dell'arco GH, ne seguirà che l'apotema OE è maggiore di CB.

Dall' altra parte di CF facciasi la figura CH$x$ interamente eguale alla figura CG$x$; di maniera che sia CK eguale a CG, l'angolo HCK eguale ad HCG e l'arco K$x$ eguale a G$x$; la curva K$x$G inviluppera KHG e sarà maggiore di quest' arco ( *Prop. 9* ); dunque G$x$, metà della curva, è maggiore di GH metà dell' arco; dunque, con maggior ragione, GI è maggiore di GH.

Resulta da ciò che l'apotema OE è maggiore di CB: ma i due poligoni avendo lo stesso perimetro sono fra loro come le apoteme ( *Prop. 8* ); dunque il poligono che à per mezzo lato DE è maggiore di quello che à per mezzo lato AB: il primo à più lati, poichè il suo angolo al centro è minore; dunque *di due poligoni regolari isoperimetri, quello che à più lati è maggiore*. C. B. D.

## PROPOSIZIONE X.

### TEOREMA.

*Il circolo è maggiore di ogni poligono isoperimetro.*

Si è già dimostrato che di tutti i poligoni isoperimetri e d' un medesimo numero di lati, il poligono regolare è il maggiore; laonde non si tratta adesso che di paragonare il circolo ad un poligono regolare qualunque isoperimetro.

Fig. 180. Sia AI ( *fig. 180* ) il mezzo lato di questo poligono, C il suo centro. Sia nel circolo isoperimetro l' angolo DOE eguale ad ACI; è perciò l'arco DE eguale al mezzo-lato AI. Il poligono P sta al cerchio C come il triangolo ACI sta al settore ODE; così avremo

$$P : C :: \frac{1}{2} AI \times CI : \frac{1}{2} DE \times OE :: CI : OE.$$

Tirisi al punto E la tangente EG che incontri OD prolungato in G; i triangoli simili ACI, GOE daranno la proporzione

$$CI : OE :: AI \text{ o } DE : GE;$$

dunque

$$P : C :: DE : GE,$$

ovvero $P : C :: DE \times \frac{1}{2} OE : GE \times \frac{1}{2} OE$,

uno misura del settore DOE, l' altro misura del triangolo GOE: ora il settore è minore del triangolo; dunque P è minore di C; quindi *il cerchio è maggiore di ogni poligono isoperimetro*. C. B. D.

FINE DELLA GEOMETRIA PIANA.

CONSIGLIO GENERALE
# di Pubblica Istruzione

RIP.° CAR.°

*N.°* 12

OGGETTO

*Napoli 3 Giugno 1859*

Vista la dimanda del tipografo Paolo de Simone, con la quale ha chiesto di ristampare l' opera intitolata – *Elementi di Geometria Piana di A. M. Legendre.*

Visto il parere del Regio Revisore D. Ambrogio Mendia

Si permette che la suindicata opera si ristampi, però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto nel confronto esser l' impressione uniforme all' originale approvato.

Il Segretario Generale
GIUSEPPE PIETROCOLA

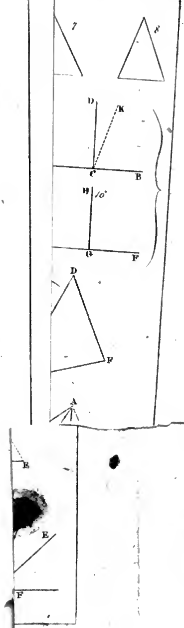
Il Consultore di Stato
Presidente provvisorio
CAPOMAZZA

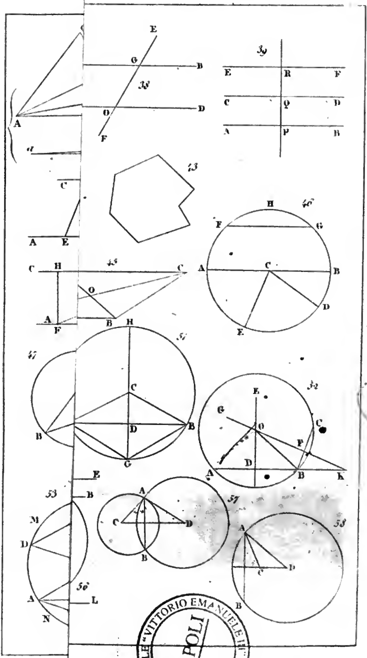
COMMISSIONE ARCIVESCOVILE PER LA REVISIONE DE' LIBRI

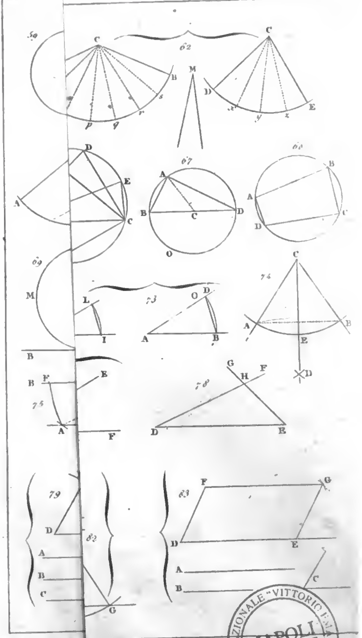
Nihil obstat
REV. JOSEPH MOLINARI

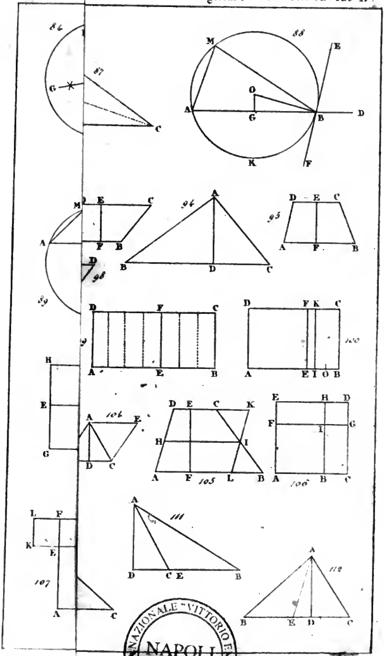
Imprimatur
pro Dep.°
LEOP. RUGGIERO.

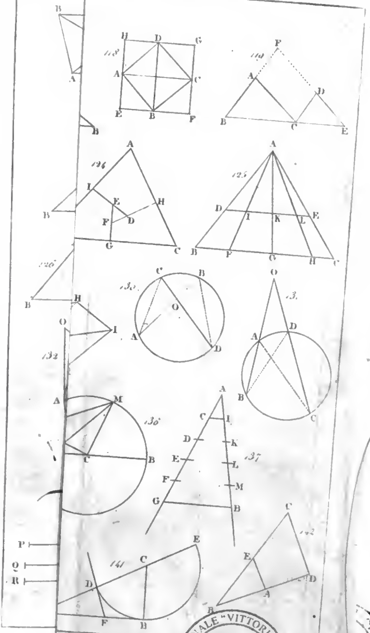
om: Piana  Tav. I.

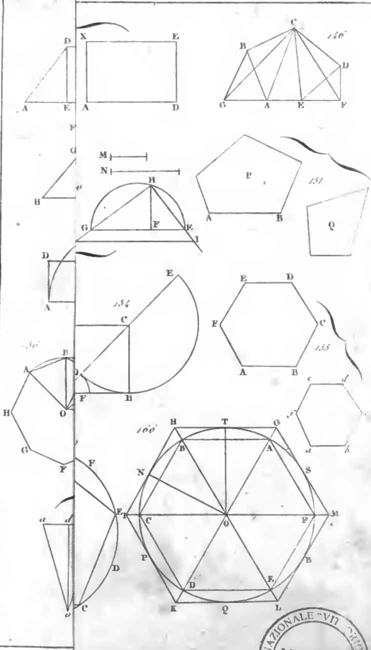


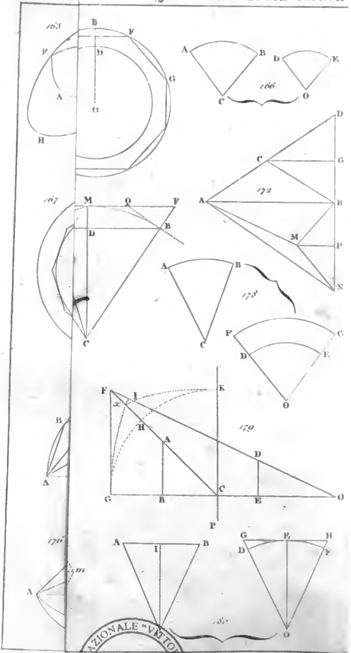


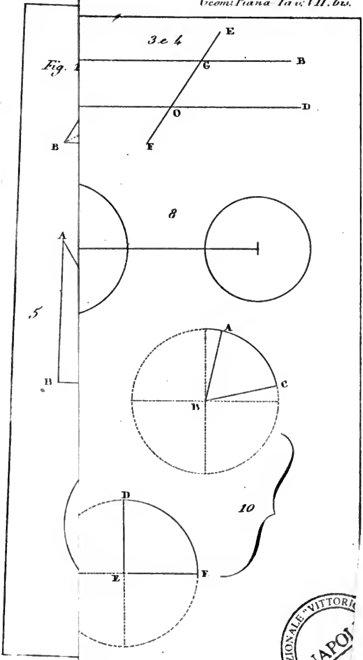









163
166
167
172
178
179
176
180
A B C D E F G H I K M N O P


3 e 4
Fig. 1
E
B
G
D
O
F
B
8
A
5
B
A
C
B
10
D
E
F